

# Analysis of the Coupled Thermal Stress of Thin-walled Rotating Discs

Cui Zhang Kun Zhang

School of Mechanical Engineering, Shanghai Shanda University, Shanghai, 201209, China

## Abstract

The corresponding compatibility and stress control equations are determined from the thin-wall rotating disc axial symmetry characteristics by the heat-coupled constitutive, geometry and equilibrium differential equations. The study shows that the disc speed, temperature and radial thickness significantly affect the thermal stress, especially the stress concentration when the inner diameter thickness ratio is 0.9, the disc stress concentration coefficient can reach 13.03.

## Keywords

thin-walled rotating disc; theory of thermal and elastic coupling; Ariy stress function; stress concentration

## 薄壁旋转碟片的耦合热应力分析

张翠 张坤

上海杉达学院机械工程学院, 中国·上海 201209

## 摘要

根据薄壁旋转碟片轴对称特性, 由热耦合本构方程、几何方程和平衡微分方程, 确定相应的相容方程及应力控制方程。研究表明: 碟片转速、温度、径向厚度显著地影响其热应力特别是内径处应力集中情况, 当内外径厚度比为0.9时, 碟片应力集中系数可达13.03。

## 关键词

薄壁旋转碟片; 热弹性耦合理论; Ariy应力函数; 应力集中

## 1 引言

现代工业追求高功率化的趋势势必导致工业构件处于更复杂的工作环境中, 典型的包括机械加工中磨削砂轮和电机中的转子等均受到极强的惯性和温度载荷。这些工业构件均属于薄壁旋转碟片类模型, 该模型的失效是机器整体中最常见、最高发的, 其中内径高副配合处应力集中环带的应力强度又是该模型失效的主要诱因之一<sup>[1]</sup>。

## 2 数学模型

均质等厚度薄壁旋转碟片不受外力作用, 而仅受到由于碟片绕中心轴  $z$  旋转导致的平行于碟片板面的惯性力作用时, 旋转碟片可简化为平面应力情况下的同心圆数学模型, 以其圆心为参考极坐标系原点  $O$ , 其内、外径位置分别为  $a, b$ , 记径向位置及极角分别为  $r, \theta$ , 且碟片转速为  $\omega$ 。

【作者简介】张翠(1990-), 女, 中国上海人, 硕士, 助教, 从事固体力学研究。

## 3 力学模型

薄壁旋转碟片模型的几何形状和所受外力均不随极角  $\theta$  变化, 这类问题中模型结构和受力情况均对称于中心轴  $z$ , 因而其应力只与径向位置  $r$  有关, 与极角  $\theta$  无关。故论文模型属于应力轴对称问题<sup>[2]</sup>, 该平衡微分方程为:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho\omega^2 r = 0 \quad (1)$$

式中:  $\sigma_\theta$  为环向应力,  $\rho\omega^2 r$  项是碟片旋转导致的惯性力, 其中  $\rho$  为单质材料密度, 由于其为径向位置  $r$  的函数, 所以这是一个变体力。极坐标系下模型的几何方程可表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  分别为径向、环向应变,  $u_\theta$  为环向位移。值得注意的是: 变体力情况下, 模型位移并不是轴对称的。由热弹性耦合理论导出应力分量表示应变分量的热耦合本构

方程<sup>[2,3]</sup>:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{-k\sigma_{11} + (j+k)\sigma_{22} - jIT^*}{j(j+2k)} \\ \varepsilon_{22} = \frac{(j+k)\sigma_{11} - k\sigma_{22} - jIT^*}{j(j+2k)} \\ \varepsilon_{12} = -\frac{1}{j}\tau_{12} \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $T^* = \Delta T / T_0$  为无量纲温度是温度变化  $\Delta T$  与绝对参考温度  $T_0$  的比值, 论文  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ 。

在直角坐标系中, 由几何形式的相容方程及平衡微分方程推导关系, 导出耦合热应力形式的相容方程:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{j+2k}{k} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \nabla^2 \frac{jI}{k} T^* \quad (4)$$

则碟片全邻域热弹性场可表示为:

$$\sigma_r = -\frac{j+5k}{8k} \rho\omega^2 r^2 + \frac{A}{r^2} + 2C \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3j+7k}{16k} \rho\omega^2 r^2 - \frac{A}{r^2} + 2C \quad (6)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{IT^*}{j+2k} - \frac{(3j^2+9jk+2k^2)\rho\omega^2 r^2}{8jk(j+2k)} - \frac{A}{jr^2} + \frac{2C}{j+2k} \quad (7)$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{IT^*}{j+2k} - \frac{(j^2+3jk-2k^2)\rho\omega^2 r^2}{8jk(j+2k)} + \frac{A}{jr^2} + \frac{2C}{j+2k} \quad (8)$$

$$u_r = -\frac{IT^* r}{j+2k} - \frac{(3j^2+9jk+2k^2)\rho\omega^2 r^3}{24jk(j+2k)} + \frac{A}{jr} + \frac{2Cr}{j+2k} \quad (9)$$

#### 4 结果分析

研究碟片所处温度场  $T^*$ 、碟片转速  $\omega$  及碟片板面厚度  $a/b$  对于热应力集中系数  $K$  的影响如图 1 所示。

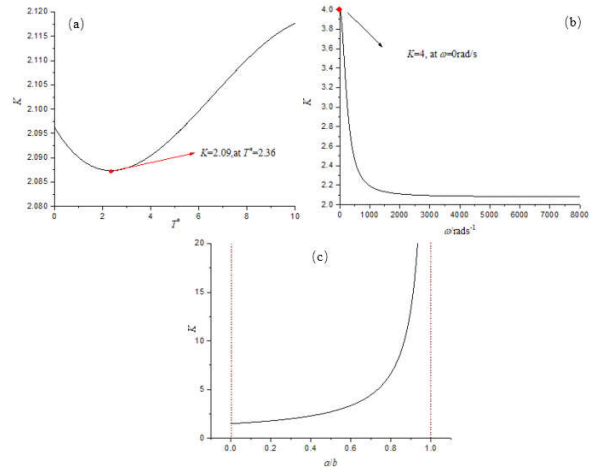


图 1 模型热应力集中系数随 (a) 温度场  $T^*$ 、(b) 碟片转速  $\omega$  及 (c) 碟片板面厚度  $a/b$  变化关系

#### 5 结语

①热弹性耦合理论导出的本构关系同样可以建立相应的相容方程, 对于不同形式的温度场、体力情况可导出不同的相容方程, 以均匀温度场、惯性力(变体力)为例的相容方程可进一步建立 Ariy 应力函数并得到应力控制方程, 相应的应力应变解析表达式明确<sup>[3]</sup>。

②薄壁旋转碟片的内径应力集中环带情况受到其温度、转速及径向厚度的影响, 其中最显著的是径向厚度。

③径向厚度越薄的碟片模型内径处应力集中情况越剧烈, 如内外径厚度比为 0.9 的碟片应力集中系数可达 13.03。以机械加工工业中的磨削砂轮为例, 若想减缓砂轮内径处应力集中情况从而增加其寿命, 在磨削半径即砂轮外径不变的情况下, 最显著的方案为减小砂轮内径。

#### 参考文献

- [1] 竹内洋一郎, 郭廷玮. 热应力[M]. 北京: 科学出版社, 1977.
- [2] 沈景凤, 张翠, 刘方. 基于热弹性耦合理论的功能梯度材料薄壁旋转碟片力学性能[J]. 复合材料学报, 2019, 36(4): 1017-1028.
- [3] 刘方, 张翠. 薄壁旋转碟片的热应力集中问题研究[J]. 农业装备与车辆工程, 2020, 58(10): 134-136.