

# Teaching Design for *Synthesis of Quadratic Functions and Geometric Shapes: Special Triangles*

Xiaohua Wang

Xi'an Jingkai No.1 High School, Xi'an, Shaanxi, 710018, China

## Abstract

The synthesis of quadratic function and geometric figure has certain complexity, abstraction and comprehensiveness. On the one hand, it examines students' mastery of basic knowledge such as quadratic function image and properties, special triangle properties and judgment, special quadrilateral properties and judgment, graphic area calculation, congruent triangles, similar triangles, etc. On the other hand, it examines students' comprehensive analysis problems, the ability to solve problems, as well as the ability to use mathematical language norms of expression, calculation ability, reasoning ability. At the same time, the important basic mathematical ideas and basic activities such as function and equation, transformation and transformation, combination of numbers and shapes, classification and discussion, etc. Based on the above reasons, the synthesis of quadratic function and geometry is a difficult point for students to learn. The paper from two dimensions, namely, how to analyze, how to answer the general method of induction, through the analysis and demonstration of three examples, to help students build a framework of thinking, experience the connection between knowledge.

## Keywords

quadratic function; geometry; senior high school entrance examination review

## 《二次函数与几何图形的综合：特殊三角形》教学设计

王晓华

西安市经开第一中学，中国·陕西 西安 710018

## 摘要

二次函数与几何图形的综合，具有一定的复杂性、抽象性、综合性，一方面考查学生对二次函数图象与性质、特殊三角形的性质与判定、特殊四边形的性质与判定、图形的面积计算、全等三角形、相似三角形等基本知识的熟练掌握；另一方面考查了学生综合分析问题、解决问题的能力，以及用数学的语言规范表达的能力、计算能力、推理能力。同时，渗透考查函数与方程、转化与化归、数形结合、分类讨论等重要基本数学思想及基本活动经验。基于以上原因，二次函数与几何图形的综合是学生学习的难点。论文从两个维度，即如何分析、如何解答进行通法归纳，通过三道例题的解析与示范，帮助学生构建思维框架，体会知识之间的联系。

## 关键词

二次函数；几何图形；中考复习

## 1 引言

针对陕西省数学中考试题历年来对二次函数解答题的考查，二次函数与几何图形的综合是数学中考复习的覆盖面之一，也是二轮专题复习的一个重点模块。下面笔者以二次函数与特殊三角形的综合为例，谈谈对二轮复习中该题的复习课设计。

## 2 选题说明

本节课属于中考二轮复习中的重难点知识突破部分，是针对中考二次函数解答题专属题位的再次复习。

二次函数与几何图形综合题是二次函数解答题的考点

【作者简介】王晓华（1986-），女，中国陕西宝鸡人，硕士，一级教师，从事初中数学研究。

之一，设问2-3问，分值8~10分，并且常常涉及二次函数的图象变换。从近14年的中考试题来看，其中涉及二次函数图象平移变换4次，中心对称变换3次，轴对称变换1次。因此对学生的数学综合能力要求很高。

## 3 学情分析

学生已经经过了一轮对基础知识、全部考点的复习，经历了多次考试的磨炼，对二次函数涉及题型基本都遇见过，但大多数学生二次函数解答题的得分仍然不理想，满分人数偏少。

学生遇到二次函数与几何图形的综合题时，或是思维混乱，没有章法，未掌握基本的分析方法和解题思路；或是因为题目条件复杂无从入手；或是因为对那些坐标未知的点抓不住，无法化抽象为直观；或是不能恰当地找出求解的条

件关系式。解题过程中涉及到的分类讨论、结果取舍问题往往缺乏严密推理，多半靠直觉。

## 4 设计思路

本节课选了3道例题，分别涉及二次函数图象的平移、对称、旋转变换与特殊三角形的综合。通过基本知识的复习及3道例题的解析过程，旨在引导学生：一是对二次函数图象的三种变换进一步理解巩固；二是掌握特殊三角形的分类讨论和常用条件关系式；三是形成二次函数与几何图形的综合题的基本分析方法和一般解题步骤。

## 5 学习目标

①已知平移方式、对称轴、对称中心时，能准确写出已知点的对应点的坐标或变换后的二次函数表达式。

②会对特殊三角形进行恰当的分类讨论。

③从构图和求解两大方面梳理出一般的分析方法和解题思路。

## 6 学习重点与难点

重点：二次函数与特殊三角形的综合题目解析。

难点：①正确审题、转化利用已知条件，恰当地分类讨论、找条件关系式，准确地求解；②用点的坐标表示线段的长度。

## 7 教学过程

### 7.1 基本知识复习

#### 7.1.1 点的变换

点(-1, 2)：沿x轴向右平移3(m)个单位，沿y轴向下平移1(n)个单位后，所得点的坐标为\_\_\_\_\_。

#### 7.1.2 抛物线的变换

已知抛物线C:  $y = (x+1)^2 + 2$

(1)沿x轴向右平移3个单位，再沿y轴向下平移1个单位后，所得的抛物线表达式为\_\_\_\_\_；

解答:  $y = (x-2)^2 + 1$

(2)关于x轴对称后，所得抛物线表达式为\_\_\_\_\_；关于y轴对称后，所得抛物线表达式为\_\_\_\_\_；

解答:  $y = -(x+1)^2 - 2$ ;  $y = (x-1)^2 + 2$

(3)绕原点旋转180°后，所得抛物线表达式为\_\_\_\_\_；绕其顶点旋转180°后，所得抛物线表达式为\_\_\_\_\_；绕点(-2, 0)旋转180°后，所得抛物线表达式为\_\_\_\_\_。

解答:  $y = -(x-1)^2 - 2$ ;  $y = -(x+1)^2 + 2$ ;  $y = -(x+3)^2 - 2$

#### 7.1.3 特殊三角形的分类讨论

①已知两点A、B，求点C使得以A、B、C为顶点的三角形是等腰三角形，若无特殊情况，需分以下三类讨论：①AB=AC；②BA=BC；③CA=CB（简记为：“两圆一线”）。

②已知两点A、B，求点C使得以A、B、C为顶点的三角形是直角三角形，若无特殊情况，需分以下三类讨论：

① $\angle BAC=90^\circ$ ；② $\angle ABC=90^\circ$ ；③ $\angle ACB=90^\circ$ （简记为：“两线一圆”）。

③以A、B、C为顶点的三角形是等腰直角三角形：先定直角，腰随之确定。

## 7.2 例题解析

例1.在平面直角坐标系中，抛物线L:  $y = x^2 + bx + c$ 交x轴于A(-2, 0)、B(3, 0)两点，顶点为M。

(1)求抛物线L的表达式；

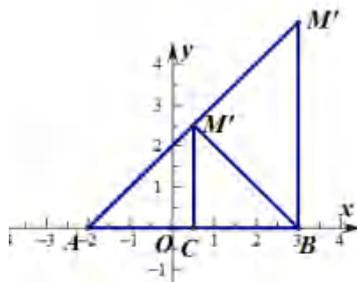
(2)将抛物线L平移，平移后的抛物线的顶点记为M'，且M'位于第一象限，若以点A、B、M'为顶点组成的三角形为等腰直角三角形，请你写出平移过程，并说明理由。

解析：(2)平移过程可由M点到M'点的坐标变化得到，因此只需由“以点A、B、M'为顶点组成的三角形为等腰直角三角形”求出点M'的坐标即可。以点A、B、M'为顶点组成的三角形为等腰直角三角形，且M'位于第一象限，因此需分2类进行讨论：① $\angle ABM'=90^\circ$ ，AB=BM'；② $\angle AM'B=90^\circ$ ，AM'=BM'。

解：(1)将点A(-2, 0)、B(3, 0)代入 $y = x^2 + bx + c$ 中，得：

$$\begin{cases} 0 = 4 - 2b + c \\ 0 = 9 + 3b + c \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} b = -1 \\ c = -6 \end{cases} \quad \therefore y = x^2 - x - 6$$

(2)如图，①当 $\angle ABM'=90^\circ$ ，AB=BM'时，则BM'=AB=5，此时M'(3, 5)。



由(1)可得点M( $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{25}{4}$ )， $\therefore$ 将原抛物线先向右平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{45}{4}$ 个单位长度；

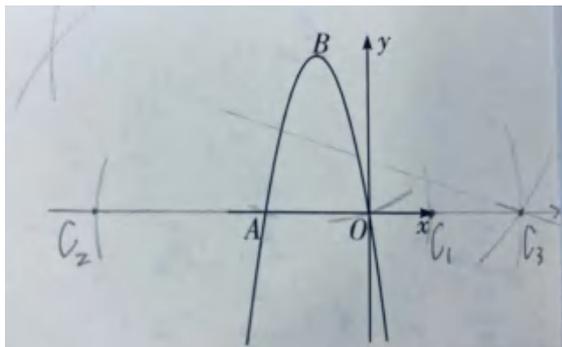
②当 $\angle AM'B=90^\circ$ ，AM'=BM'时，过M'作M'C $\perp$ AB与点C，则M'C= $\frac{1}{2}$ AB= $\frac{5}{2}$ ，此时M'( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ )。

$\therefore$ 将原抛物线向上平移 $\frac{35}{4}$ 个单位长度。

综上所述，将原抛物线先向右平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{45}{4}$ 个单位长度或将原抛物线向上平移 $\frac{35}{4}$ 个单位长度。

例2.如图，已知抛物线M:  $y = ax^2 + bx + c$ 与x轴交于原

点O和点A(-6, 0), 顶点为B, 且抛物线经过点(-1, 5)。



(1) 求顶点B的坐标;

(2) 若抛物线M1与抛物线M关于直线 $x=m$  ( $m \neq -3$ )成轴对称, 点A的对应点为C, 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, 求m的值。

解析: (2) 根据题意易知点C在x轴上, 且点C(2m+6, 0), 要使得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 则需分3类讨论: ①  $AB=AC$ ; ②  $BA=BC$ ; ③  $CA=CB$ 。

例3. 已知抛物线C1:  $y = x^2 - 2x - 3$ 的顶点为M, 与x轴交于A, B两点(点A在点B的左侧)。

(1) 求点A和点M的坐标;

(2) 点P是x轴负半轴上一点, 将抛物线C1绕点P旋转 $180^\circ$ 后得到抛物线C2, 若抛物线C2的顶点为N, 与x轴交于C, D两点(点C在点D的左侧), 当以点C, M, N为顶点的三角形是直角三角形时, 求点P的坐标。

解析: (2) 分析题意可知, 点M(1, -4), 点N在第二象限, 且纵坐标为4, 点C为点B(3, 0)关于P点的对称点, 故设点P的横坐标为m, 则N(2m-1, 4), C(2m-3, 0). 构图分析, 不难发现只需分2类讨论: ①  $\angle NCM=90^\circ$ ; ②  $\angle CNM=90^\circ$ . 由勾股定理分别列方程求解即可。

### 7.3 课堂小结

二次函数与几何图形的综合——针对中考二次函数解答题。

#### 7.3.1 第一问常见设问及方法

确定二次函数解析式(已知则代条件解方程组; 未知则以简便计算为原则选择恰当的表达式)、对称轴(公式或对称点的中点横坐标或化为顶点式)、顶点(公式或化为顶点式)、与x轴交点(令 $y=0$ )、与y轴交点(令 $x=0$ )。

#### 7.3.2 应用

应用如图1所示。



图1 应用

### 7.3.3 一般步骤

①分析题意, 找点构图; ②设恰当的未知数; ③表示出所有涉及的点的坐标; ④用坐标表示关键线段的长度(或线段长度的平方); ⑤根据判定几何图形的条件关系式或几何图形的性质关系式列方程; ⑥化简并求解方程; ⑦根据条件考虑根的取舍; ⑧归纳结果、按要求作答。

### 7.4 布置作业

1. 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ 的图象与x轴交于A、B两点(点A在点B右侧), 与y轴交于点C。

(1) 求点A、B、C的坐标;

(2) 若点P在抛物线对称轴上, 且在x轴上方, 当 $\triangle PBC$ 为等腰三角形时, 求出所有符合条件的点P的坐标。

2. 已知, 抛物线 $y = x^2 - mx - 5$ 与x轴交于点A, B(点A在点B的左侧), 与y轴交于点C, 且对称轴L为直线 $x=2$ 。

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 在对称轴L上是否存在点P, 使 $\triangle CPB$ 为直角三角形? 若存在, 求出点P的坐标; 若不存在, 请说明理由。

## 8 教后反思

本节课基本上按教学设计完成了教学目标, 课堂进展顺利, 学生活动充分, 思维量大, 容量充足。

教学过程重在对学生进行方法、思路的引导, 合理应用多媒体, 大大提高了课堂效率。

也存在一些不足, 比如对例1、例2的处理过程, 针对学生解题过程中出现的问题如果能应用几何画板规范演示, 可能会让学生对规范构图产生更加深刻的认识, 从而能更好地在解题过程中执行。对于学生构图正确但无法列出正确或恰当的方程这一问题, 没能展开进行, 应该引导学生一步步由点的坐标表示出关键线段, 对常见类型的等量关系进行梳理对比, 再列方程, 这样本节课的难点就更突出, 效果会更好。

### 参考文献

- [1] 《义务教育数学课程标准(2022年版)》[M].北京:北京师范大学出版社.
- [2] 《数学教师教学用书(九年级下册)》[M].北京:北京师范大学出版社.
- [3] 《陕西省初中学业水平考试例析与指导》[M].西安:陕西师范大学出版总社有限公司.