Analytical Probability Theory and Discovery of New Theorems

Shengyu Cai

Xi'an Jiaotong-Liverpool University, Suzhou, Jiangsu, 215127, China

Abstract

With the development of society, mathematics in daily life more and more widely used, but also everywhere. As an important part of mathematics, probability also plays a very important role. As Joseph Butler said, this is the real life guide. There have been three great leaps in the history of mathematics. The first leap is from arithmetic to algebra, and the second leap is from constant mathematics to variable mathematics, the third leap is from deterministic mathematics to stochastic mathematics. This paper is divided into two parts, the first part is mainly about the analytic probability theory; the second part is about the discovery of the new theorem, involving inequality and geometry, which provides new data for the later development of mathematics.

Keywords

new theorems; probability theory; inequalities; geometry

解析概率论与新定理的发现

蔡圣聿

西交利物浦大学，中国 · 江苏 苏州 215127

摘　要

随着社会的发展，数学在日常生活中的应用越来越广泛，也无处不在。概率作为数学的重要组成部分，也起着很重要的作用。正如约瑟夫·巴特勒所说，这才是真正的人生指南。在数学的历史发展过程中曾出现过三次重大的飞跃，第一次飞跃是从算数过渡到代数，第二次飞跃是常量数学到变量数学，第三次飞跃就是从确定数学到随机数学。论文大体分为两个部分：第一部分主要解析概率论；第二部分主要讲述的是新定理的发现，涉及不等式与几何学，为后期数学发展提供新的数据参考。

关键词

新定理；概率论；不等式；几何学

1 引言

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。等可能概型包含了古典概型与几何概型，论文将在等可能概型中定义两类条件，并利用几何展现出等可能概型中所研究事件发生的概率在受其影响后的变化过程 [1,2]。

2 解析概率论

2.1 一个常见概率问题的探索

以抽卡片为例，现有 5 张形状大小完全相同的卡片，其反面完全相同，正面有 4 张为白色，1 张为黑色。现将其反面向上置于桌上，随机地从中抽取 1 张卡片，则抽到黑色卡片的概率为 1/5。现给该事件添加条件。若在取走一张白色卡片或添加一张黑色卡片的前提下进行抽取，则抽到黑色卡片的概率显然将发生变化。若将置于桌上的卡片调整位置，譬如使它们排成一排，将黑色的卡片置于中间，仍全部反面向上，使一个具有喜好居中位置的人从中随机地抽取一张卡片，则他抽到黑色卡片的概率自然会变大。

2.2 关于两种条件的讨论

通过对上述举例的阐述，不难看出，其均改变了从五张卡片中抽到黑色卡片的概率。前者通过改变卡片的数目，从而改变了抽到黑色卡片的概率；后者则仅是改变了卡片的位置，巧妙地利用一个人的偏好，改变了抽到黑色卡片的概率。

综上所述，在等可能概型中，我们定义如下两类条件：一是在古典概型中，我们称那些不改变样本空间包含的样本点数与所研究事件包含的样本点数但能改变所研究事件发生的概率的条件为“质条件”；仅通过改变样本空间包含的样本点数或所研究事件包含的样本点数来改变所研究事件发生的概率的条件为“非质条件”。二是在几何概型中，我们称那些不改变样本空间的几何度量值与所研究事件的

【作者简介】蔡圣聿（2005–），男，中国陕西铜川人，本科，从事应用数学研究。

几何度量值但能改变所研究事件发生的概率的条件为“质条件”[3]；仅通过改变样本空间的几何度量值或所研究事件的几何度量值来改变所研究事件发生的概率的条件为“非质条件”。

2.3 几何的引入

我们将通过几何对等可能概型进行进一步研究。如图 1 所示。

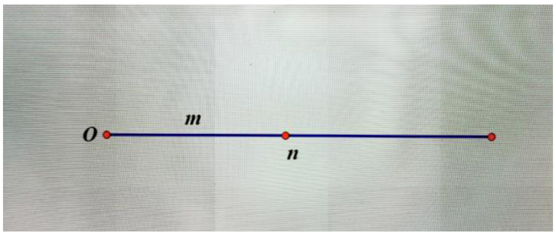

图 1

以点 O 为原点，令线段 m 的长度代表所研究事件包含的样本点数或所研究事件的几何度量值，线段 n 的长度代表样本空间包含的样本点数或样本空间的几何度量值，线段长度与样本点数或几何度量值成正比，则所研究事件发生的概率可表示为线段 m 的长度与线段 n 的长度的商，即 P = m/n（m ≤ n）。现在引入两种条件。非质条件通过改变线段 m 或线段 n 的长度来改变所研究事件发生的概率；质条件显然并不影响线段 m 与线段 n 的长度，它的影响效果是使得线段 m 与线段 n 之间的夹角不再为零。

当存在质条件影响所研究事件发生的概率时，记此时线段 m 与线段 n 之间的夹角为 θ，如图 2 所示。

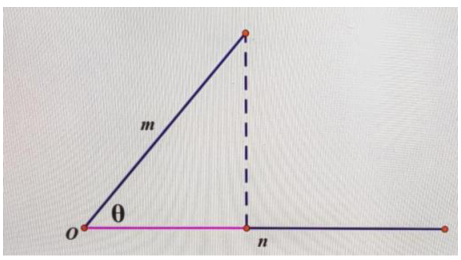

图 2

若该质条件使得所研究事件发生的概率减小，则此时所研究事件发生的概率可表示为线段 m 在线段 n 方向上投影的长度与线段 n 的长度的商，即 P = m · cos θ /n（m ≤ n，0 ≤ θ ≤ π/2），如图 3 所示。

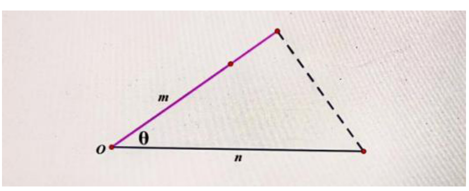

图 3

若该质条件使得所研究事件发生的概率增大，则此时所研究事件发生的概率可表示为线段 m 的长度与线段 n 在线段 m 方向上投影的长度的商，即 P = m/n · cos θ（m ≤ n，0 ≤ θ ≤ arccos m/n）。当存在多个质条件或非质条件时，我们应当按照以下方式进行处理：当这两条线段受到一个非质条件影响后，应将影响后的两条线段作为一个新事件的两条线段，然后再引入下一个条件进行处理；当这两条线段受到一个质条件影响后，应将产生的线段的投影与未投影的线段作为一个新事件的两条线段，然后再引入下一个条件进行处理。

2.4 相关概念的构建

通过对上述体系的阐述，为了方便研究，我们称线段 m 为子概率线，n 为母概率线。特别的，当所研究事件发生的概率不受任何的条件影响时，我们称其为该事件发生的自然概率。

3 新定理的阐释

3.1 定理【1】

对于任意非负实数 a、b，满足 $a \geqslant b$，则下列不等式成立：

$$(a+b)^n \leqslant \frac{2^n}{n}（a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^{n-r}b^r+\cdots ab^{n-1}）（n \in N^+）$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

证明：我们采用数学归纳法：

①当 $n=1$ 时，$a+b<2a$ 显然成立。

②假设 $n=k$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，有：

$$（k+1）(a+b)^{k+1} \leqslant 2^k（a^k+a^{k-1}b+a^{k-2}b^2+\cdots+a^{k+1}b^r+\cdots+ab^{k-1}）（a+b）+(a+b)^{k+1}$$

化简得：

$$（k+1）(a+b)^{k+1} \leqslant 2^{k+1}（a^{k+1}+a^k\mathrm{b}+a^{k-2}b^2+\cdots+a^{k+1-r}b^r+\cdots ab^k）+(a+b)^{k+1}-2^k(a^{k+1}+a\mathrm{b}^k)$$

因此只需证明：

$$(a+b)^{k+1}-2^k(a^{k+1}+a\mathrm{b}^k) \leqslant 0$$

上式可化为：

$$(\frac{a+b}{2})\quad(\frac{a+b}{2})^k \leqslant \cdot\, a\frac{a^k+b^k}{2}$$

显然 $\frac{a+b}{2} \leqslant a$，因此只需证明：

$$(\frac{a+b}{2})^k \leqslant \frac{a^k+b^k}{2}$$

对于函数 $f（x）=x^a$，若 $x \in N^+$、$x \geqslant 0$，则当 $x \geqslant 2$ 时，可知 $f（x）$ 为凸函数，因为 $a \geqslant b \geqslant 0$、$k \in N^+$，所以当 $k \geqslant 2$ 时，可由琴生不等式有：

$$(\frac{a+b}{2})^k \leqslant \frac{a^k+b^k}{2}$$

又当 $k=1$ 时，$\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$ 恒成立，因此当 $a \geqslant b \geqslant 0$、$k \in N^+$ 时，有：

$$(\frac{a+b}{2})^k \leqslant \frac{a^k+b^k}{2}$$

由上式可知：原不等式成立，当且仅当 $a=b$ 时等号

成立。

3.2 定理【2】

若点 K 是△ ABC 的共轭重心，过点 K 作△ ABC 的三条逆平行线，分别交三边于点 O、P、Q，则 O、P、Q 三点共线。

证明：如图 4 所示。

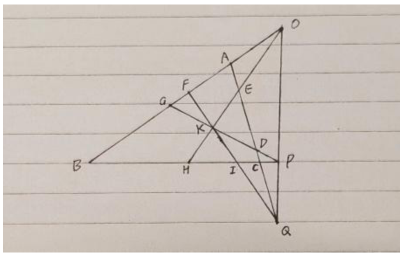

图 4

分别对△ KHP、△ KQE、△ KGO 应用张角定理得：

$$\frac{\sin\angle HKP}{KI}=\frac{\sin\angle HKI}{KP}+\frac{\sin\angle PKI}{KH} \quad (1)$$

$$\frac{\sin\angle EKQ}{KD}=\frac{\sin\angle EKP}{KQ}+\frac{\sin\angle QKP}{KE} \quad (2)$$

$$\frac{\sin\angle OKG}{KF}=\frac{\sin\angle OKF}{KG}+\frac{\sin\angle GKF}{KO} \quad (3)$$

由已知有：KD=KG，KE=KH，KF=KI

因为：sin ∠ HKP=sin ∠ OKG

sin ∠ EKQ=sin ∠ OKF

sin ∠ PKI=sin ∠ QKP

所以由式（1）、式（2）、式（3）有：

$$\frac{\sin\angle HKI}{KP}=\frac{\sin\angle GKP}{KO}+\frac{\sin\angle EKP}{KQ}$$

因为：sin ∠ HKI=sin ∠ OKQ

sin ∠ GKP=sin ∠ QKP

sin ∠ EKP=sin ∠ OKP

所以：$\frac{\sin\angle OKQ}{KP}=\frac{\sin\angle GKP}{KO}+\frac{\sin\angle OKP}{KQ}$

由张角定理逆定理知 O、P、Q 三点共线。

3.3 定理【3】

平面内任意条直线将平面分为若干个区域，当其交点数 n ⩾ 3 时，任意凸图形无法经过所有区域。

证明：我们先证明以下结论，如图 5 所示。

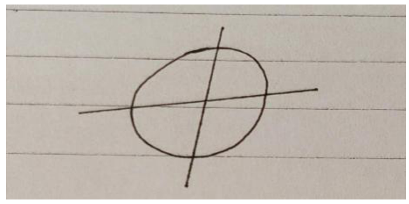

图 5

平面内任意两条直线相交，当且仅当交点在凸图形内部时，凸图经过其划分的所有区域。我们根据反证法，假设凸图形经过其划分的所有区域且交点在其外部，如图 6 所示。

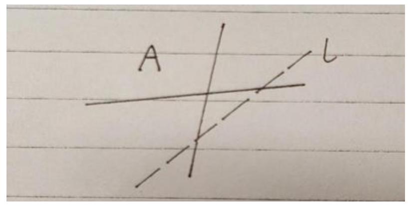

图 6

根据凸图形的定义，其上任意一点处的切线使之分布于同侧。设 l 为其一条切线，l∩A= ∅，因为交点在其外部，所以凸图形分布于 L 下侧，显然其一定无法经过区域 A，产生矛盾，类似地可以证明交点在其上的情况，则结论得证。因此当 n 个交点中存在交点在凸图形外部时，凸图形一定无法经过所有区域，交点在其上同理。当 n 个交点全部在凸图形内部时，根据凸图形的定义，其内部任意两点连线上的所有点恒在其内部。因为 n ⩾ 3，所以在凸图形内部一定存在一个封闭图形，则凸图形一定无法经过该封闭图形围成的区域。综上所述，该定理成立。

4 结语

论文在整体结构上划分成了两大块：第一块为概率论的解析；第二块为新定理的证明。其中，在第 2 大块中，运用不等式与几何学证明了新定理的存在，希望能为之后的数学研究提供一些数据分析。

参考文献

[1] 张伟.关于概率论教学的探索[J].少年智力开发报,2011(12):413-415.

[2] 金明鸥,尚晗之,程学建.概率论教学难点解析[J].吉林省教育学院学报(上旬),2012(10):145-146.

[3] 宋海燕,孙金燕.概率论中的疑难解析[J].榆林学院学报,2013,23(4):51-53+57.