教学方法创新与实践 · 第 07 卷 · 第 11 期 · 2024 年 10 月　DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v7i11.20784

The Principle of Matter Automatically Taking Extreme Values During Movement and Change

Zhixin Huang

Guangzhou Liwan District Science and Technology Association, Guangzhou, Guangdong, 510000, China

Abstract

The paper first discusses the derivative and variational method for the relationship between extreme value and quantity field gradient, obtained under certain conditions the three equivalent to: the nature of material quantity (such as mass, momentum, energy, power, etc.) along the gradient of the direction of the flow, and its size and the absolute value of the gradient, then studied the effect of the real physical meaning is: the momentum in four dimensional space and time. From these two points, it is concluded that matter moves and changes in four-dimensional space and time, if there is no loss, they reach the maximum transmission at the fastest speed and the shortest time (including the above flux); if there is a loss, choose the minimum loss path or the minimum dissipation for transmission, which is equivalent to the minimum entropy generation rate theorem. All of the above theorems apply to mechanics, optics, electromagnetism, thermodynamics, and quantum mechanics, to the relativistic dynamics of matter, and also to chemical material changes.

Keywords

principle of minimum action; four dimensional momentum potential; momentum; energy

物质在运动与变化过程中自动取极值的原理

黄志新

广州市荔湾区科技协会，中国 · 广东 广州 510000

摘　要

论文首先探讨了用导数及变分法求极值与数量场梯度的关系，得出了在一定条件下上述三者等价于：自然界物质的各种量（如质量、动量、能量、电量等）沿着等势线的梯度降落的方向流动的，并且其大小与梯度的绝对值成正比，继而研究了作用量的真正物理含义就是：四维时空中的动量势。再从这两点出发得出：物质在四维时空中运动及变化，若无损耗时则它们以最快的速度、最短的时间达到最大的传输量（包括以上诸通量）；若有损耗时，则选择最少损耗的路径或最小耗散的方式进行传输，这等价于最小熵产生率定理。上述所有的定理适用于力学、光学、电磁学、热力学以及量子力学，在物质高速运动时的相对论动力学等全部的物理变化过程，也适用于化学的物质变化过程。

关键词

最小作用量原理；四维动量势；动量；能量

1 引言

从经典力学到现代物理学，从宏观世界到微观领域，科学家们一直在寻找能够描述这些现象的普适原理。最小作用量原理作为物理学中一个重要的概念，不仅在经典力学中占据着核心地位，而且在现代物理学的各个分支中都发挥着重要作用。论文旨在探讨最小作用量原理在不同物理领域中的应用及其背后的数学和物理机制。论文将通过数学和物理的结合，深入探讨最小作用量原理在不同物理领域中的应用，揭示其背后的普适性原理，并尝试将这些原理应用于化学物质变化过程的研究中。通过这一研究，我们不仅能够更好地理解自然界中物质运动和变化的规律，还能够为科学技术的发展提供新的理论基础和方法。

2 函数及泛函的梯度

2.1 函数的梯度

有一三维空间，它上面有物质流动（或传递），它们必然垂直于这空间等值线（相当于三元函数的梯度）的反方向流动：

$$-\nabla f(x,y,z)=-(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

$$(\frac{\partial f}{\partial x}=0\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\ . \qquad (1)$$

2.2 泛函的梯度

设有泛函：

【作者简介】黄志新（1960–），男，中国浙江杭州人，本科，工程师，从事数学、物理、工程发明等研究。

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y^{'})dx, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1.$$

如果 J[y] 可导，求其一阶导数，（泛函的 n 阶变分，就是它的 n 阶导数）：

J’［y]= δ J[y]= $\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y^{'})dx,$

按文献 [1] 求导结果为：

$$\nabla J(y)=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \qquad （2）$$

即泛函的 1 阶变分，就是它的 1 阶导数，也就是它的梯度，但它不是一个矢量，而是一个矢函数，也就是泛函 J[y] 的梯度，它的作用类似于函数的梯度。

而沿着负梯度流动和变化的物质，就是沿着等值线变化最快的方向而流动，其流动量和变化的大小与该方向的梯度绝对值的大小成正比，因此：这些物质的流动和变化达到了最大值。

3 最小作用量的真正物理含义

3.1 拉格朗日函数 L 对时间的积分称为作用量

而拉格朗日量：$L(q,q',t)=T-U$，它是动能与势能之差，实际上是表示动能与势能互相转化的过程。

首先把上式写成（x，y，z）的函数，再用 L 对 P3（三维动量）求偏导数：

$$\nabla L=\frac{\partial L}{\partial p_x},\frac{\partial L}{\partial p_y},\frac{\partial L}{\partial p_z} \qquad （3）$$

作用量为：

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}L(q,q',t)dt$$

让 S 对时间求导数：

$$\frac{dS}{dt}=L(q,q',t)$$

再对 pk（1，2，3）求偏导数：

$$\frac{dS}{dt}\frac{\partial S}{\partial p_k}$$

$$=\frac{\partial S}{\partial p_x},\frac{\partial S}{\partial p_y},\frac{\partial S}{\partial p_z},\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\nabla(S)_4=\nabla_3(S),\frac{\partial S}{\partial t} \qquad （4）$$

作用量的梯度可以看作是作用量对三維动量的梯度加上一维时间梯度即 4 維时空梯度（这里是低速时的所谓 4 維时空梯度，是三维空间梯度加一维时间梯度，后面的一维实质上只是能量型态对时间的变化率），因此不同于相对论的 4 时空梯度。

先讨论三维的动量梯度，因为动量等于物体的质量乘以速度，而质量是个标量，没有方向，因此动量梯度的方向与物体的速度矢量一致，而上面已经讨论了物体沿着最快的速度变化方向运行，因此所需的时间也是最短的。

定理 1：函数或泛函的四维梯度：p4= ∇ S4，表示存在这样一个矢量 p4（动量及能量复合体）， 其方向为函数 S 变化率最大的方向，其模正好等于这个最大的数值，换言之，矢量：p3 在这里取极值，即表示粒子沿着最快的方向而流动；而$\partial S/\partial t=-dW/dt=0$，则表示不同形态的能量（如机械能中动能与势能的互相转化）会自动沿着最短时间的方式进行转变；这就是所有动量与能量在传输过程中取极大值的奥秘所在。∇ S=0，与$\partial S/\partial t=0$，相当于变分为 0，其实质是该粒子的物质流、动量流、能量流总沿着四维时空梯度最大方向及最大变化率而流动及转变。这就是最小作用量的真正物理含义（非相对论情况下）。

与梯度有关的量：引力梯度、温度梯度、浓度梯度、电势梯度、磁势梯度、……。无一不是使其对应的函数取极值。

3.2 下面探寻最小作用量的真正物理原理

最小作用量原理，是一个横跨力学，热学，电磁学，光学，以及相对论，量子力学诸学科，起着举足轻重作用的一个基本物理原理。人们已对它进行了深入的研究，但对作用量的真正的物理含义却并不十分清晰，甚至还有点含糊。在这里，先从力学着手，寻求作用量的真正的物理含义。

首先确定，当自由粒子在保守力场中运动时，E=T+U=C（常数），它表示粒子的总机械能在互相转化中是守恒的。下面先研究作用量的变分为 0：

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt=0 \qquad （5）$$

考虑拉格朗日函数：$L(q,\dot{q},t)=T-U$，开始觉得这个函数怪怪的：既不是总能量又不是部分能量，那到底这个函数的物理量的含意是什么呢?

①首先设这是一个粒子在保守力场中，在忽略损耗的情况下运动，则 T-U 就是粒子的机械能（动能与势能）之差；因为在此情况下机械能里包含的动能与粒子的势能，它们无时无刻不在互相转换变化中：不是动能转化为势能，就是势能转化为动能。

②其次作用量的变分为 0，说明在能量转化过程中，它选择以最小的时间及最快的速率在转化，若考虑为在保守力场中运动的粒子从 a 运动到 b，此粒子就选择了唯一的一条路径，此路径所需的时间最小，能量转化率也最快!

这就是最小作用量的真正物理原理。据此含义模糊不清的“作用量”也可以正式的称为“迁移率及转化率”。

③另一方面，凡矢量场都有一个与之对应的势函数组成的梯度场，而现在力学的动量却是个例外，从来没有文献提到过有动量的势函数，也没有与动量势对应的梯度场。下面通过寻找作用量与动量的关系入手，再转而通过最小作用量原理论证论文的主题：物质各特征量（动量、角动量、能量、质量、电荷量等）以极大值传输及转化的原理，这就是最小

作用量的真正物理含义。

定理 2：作用量 S 实际上是一个势函数，它是四维时空中的动量势的负值。

证 1：先对非相对论三维作用量求偏导数：

$$\partial S/\partial x=p_x,\quad \partial S/\partial y=p_y,\quad \partial S/\partial z=p_z$$

即：

$$p3=-\nabla S \tag{6}$$

对比电场强度与电势的关系式：E=—∇ V .　　（7）

对比上述两式，以及势函数的定义马上可知：作用量的真正含义就是三维动量势函数。在加上 $\partial S/\partial t=-dW/dt$，就相当于四维动量势函数。

证 2：以下考虑相对论四维时空体系的情况，因为相对论四维时空动量为：

$$\nabla(S)_4=\nabla_3(S),\frac{\partial S}{\partial t} \tag{8}$$

而：

$$\partial S/\partial t=-dW/dt \tag{9}$$

将式（6）和式（8）两式代入式（7）：

$$\nabla(S)_4=\nabla_3(S),(\ i/c)\partial s/\partial t \tag{10}$$

或：

$$p_4=\left[\frac{\partial S}{\partial p_x},\frac{\partial S}{\partial p_y},\frac{\partial S}{\partial p_z},\frac{i}{c}\frac{dS}{dt}\right] \tag{11}$$

由式（6）至式（10）等式子，便清楚地看到作用了量 S，的确是四维时空中的四维动量势。只是差一个负号，原因是作用量的定义是：$S=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt$，而拉格朗日函数 $L(q,\dot{q},t)=T-V$，即势能已取负值因而出现差一个负号的现象。若取而拉格朗日函数的负值，即 $-L(q,\dot{q},t)=V-T$，则：

$$S^*=-S=-\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)dt\ . \tag{12}$$

①在非相对论的情况下：

三维动量：

$$\bar{P}=-\nabla S^*,\ W=\frac{dS^*}{dt}$$

四维动量：

$$\bar{P}=-\nabla S^*,\ \frac{1}{v}\frac{\partial S^*}{\partial t} \tag{13}$$

②而在相对论情况下，闵可夫斯基四维时空的动量为：

$$\overline{P_4}=\nabla S_3^*,\frac{i}{c}\frac{S^*}{t} \tag{14}$$

与电势、电场关系式（7）比较，在形式上，内容上更能说明 S 确实是四维动量势。动量势相同的面在四维时空中构成等势面，它类似于电磁学中的等势面 . 从势函数的性质可知，物质的动量流和能量流垂直于等势面以最快的速度，最短的时间运动，以最快的速度穿过等势面，以短的时间进行能量转换，这就是最小作用量的物理意义。

4 最小作用原理在物理学其它部分的应用

4.1 动量势的表达式：在自由粒子的波函数中：

$$S=\bar{p}r-Wt \tag{15}$$

因为四维动量是洛仑兹变换下的不变量：

$$p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2-W^2/c^2=\text{不变量}$$

下面欲求其泛函 $J[uf(x,y,z)]$ 的极值，而泛函 J 取极值的必要条件是令其变分为 0，而此条件也与欧拉方程及奥氏方程相当：

$$\delta\iiint_\Omega[u^2+u^2+u^2+2u(x,y,z)dxdydz=0 \tag{16}$$

$$\delta J(u)=\delta\iiint_V[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2+kf(x,y,z)]dxdydz=0$$

它的积分区域为 Ω，$f(x,y,z)$ 为已知函数，则它的奥氏方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}u_x+\frac{\partial}{\partial y}u_y+\frac{\partial}{\partial z}u_z=f(x,y,z)$$

此即：

$$\Delta u=\nabla\bullet\nabla u=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+\frac{\partial u^2}{\partial z^2}=f(x,y,z) \tag{17}$$

该方程就相当于泛函的梯度：

$$\nabla J(u)\Rightarrow(\frac{\partial F}{\partial u}\ -\nabla\bullet(\frac{\partial F}{\partial u'})=0$$

事实上，欲求变分：

式（16）被积函数的平方项即函数梯度的平方：

$$(\nabla u)^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2$$

根据变分法的欧拉定理：

$$\begin{aligned}&F'_u=f(x,y,z)\\&\frac{\partial}{\partial x}F'_{u'_x}=2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\\&\frac{\partial}{\partial y}F'_{u'_y}=2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\\&\frac{\partial}{\partial z}F'_{u'_z}=2\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{18}$$

则奥氏方程为：

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=kf(x,y,z) \tag{19}$$

它就是泊松（Poisson）方程。

而其梯度即为：

$$\nabla u\ =i(\frac{\partial u}{\partial x})\ +j(\frac{\partial u}{\partial y})\ +k(\frac{\partial u}{\partial z})$$

因此，令泛函式（16）的变分为 0，就求得上述的二阶数理方程，也等效为物体沿梯度降落方向运动，而梯度场的散度：

$$\nabla\bullet\nabla\Psi=\nabla^2\Psi=kf(x,y,z)$$

写成分量形式：

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=kf(x,y,z) \quad (20)$$

这就是著名的二阶偏微分数理方程，当方程右边的 $kf(x,y,z)$ 取不同值时，是不同的物理方程：

①当它取 0 时即为拉普拉斯方程。

②当它取 $2f(x,y,z)$ 时为泊松方程。

③取 k $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ 时为热传导方程或扩散方程。

④取 $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ 时即为波动方程。

⑤取复数 $\frac{2im}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ 时，就是量子力学中著名的薛定谔方程。

上述数理方程的推导过程，无不来自函数的梯度或泛函的梯度。

综上所述，函数的导数为 0，或偏导数为 0，对应着该函数的梯度为 0；而泛函取极值的必要条件是变分为 0，或欧拉方程、奥斯特洛格拉斯基方程为 0，而这两种求解变分法的方程可看成是泛函的梯度；对于很多运动物质所遵循的二阶数理偏微分方程，实际上来自于梯度平方（梯度绝对值的平方）的变分，而它又是泛函变分的一种，总而言之，（3.2）式的一切极值的求解，无不与梯度有关 [2]。

函数或泛函的梯度：p= ∇ S，表示存在这样一个矢量 p（动量），其方向为函数 S 变化率最大的方向，其模正好等于这个与梯度的绝对值成正比，总而言之，其运动与变化沿着最大的数值的方向进行；换言之，矢量 p 在这里取极值。而 ∂ S/ ∂ t= — ∂ w/ ∂ t 表示动量与能量沿着最短时间的方向流动 . 这就是所有传输过程取极值的奥秘所在。

∇ S=0 及 ∂ S/ ∂ t=0，相当于变分为 0，其实质也是该物质流总沿着四维时空梯度而流动 .

与梯度有关的量：引力梯度、温度梯度、浓度梯度、电势梯度、磁势梯度……无一不使其对应的函数取极值。

4.2 四维时空坐标的作用量

根椐四维时空动量与动量势的关系可得：

$$cc \quad (\frac{\partial S^*}{\partial x})^2+(\frac{\partial S^*}{\partial y})^2+(\frac{\partial S^*}{\partial z})^2-\frac{1}{c^2}(\frac{\partial S^*}{\partial t})^2=\text{恒量} \quad (21)$$

对上式求变分：

$$\delta\iiiint_{s_3\ t}[(\frac{\partial S^*}{\partial x})^2+(\frac{\partial S^*}{\partial y})^2+(\frac{\partial S^*}{\partial z})^2-\frac{1}{c^2}(\frac{\partial S^*}{\partial t})^2]d\,x\,d\,y\,d\,z\,d\,t$$

$$\frac{\partial^2 S^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S^*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S^*}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S^*}{\partial t^2}=0 \quad (22)$$

前面三个是矢量，后面一个是标量，在电动力学中，前面为电流密度的三维矢量，后面一个为电荷密度；在相对论四维动力学中，前面是三维动量，后面为能量 [3,4]。并且这形式与波动方程相似，所以力学量可以与波动光学量相比拟：力学量与波动光学量的比较见表 1。

表 1 力学量与波动光学量的比较

力学	能量 W	动量 p	动量势（负作用量）S^*	等势面（等作用量面）	最小作用量原理 .
光学	频率 ω	波矢 k	相角 ϕ	等相面（等波阵面）	费马原理 .

表 2 常见的梯度场

矢量场	动量场	速度场	电磁场	热流场	波动场
梯度场	动量势	速度势	电磁势	温度场（热力势）	等相面

光学量与力学量只相差一个普朗克常数 h，所以它可被称为“作用量子”，也可称为“元动量势”，从而得出量子力学与光学的相似之处。以下将几个常见的梯度场作比较，表 2 为常见的梯度场。

动量场与速度场、动量势与速度势最相似，只差一个 m（质量），一般非相对论的情况下，当 m= 恒量时，动量场与速度场便相同了，所有速度场的数学公式都可应用到动量场上，所有速度势的公式也可以应用到动量势上了。但是动量场要比速度场的应用大得多：当质量 m 与 v 都改变时，只能用动量场描述，而不能用速度场描述。但动量场与速度场的方向始终一样。

因为有动量守恒定律，分析力学中的拉格朗日函数也用动量而不用速度表述。

在量子力学中，动量是基本量，而速度却不曾出现。

动量场中有最小动量势原理（即最小作用量原理），其它矢量场也有与之相对应的最小势函数原理，如最小电势差原理、最小热势差（温度差）原理等。

除了上面所述的各种不同的场，及其最少作用量原理之外，还有以下一些最少动量与能量的传播及转换原理力学方面的还：①最少势能原理。②最少余能原理。③电磁场的最小作用量原理。④光学的费马原理（光从一点到另一点所需的时间（或光程）为极值。⑤相对论性最少作用量原理。⑥量子力学中的变分原理等。他们都利用变分为 0，都指向最小作用量的原理。

5 耗散结构中的最小熵产生定理

上面所述说的是不考虑能量损耗的物质传播与变化的最小作用量原理。但很多情况下是需要考虑损耗的，最典型的是热力学的传播与变化，以及化学变化，他们总是使得熵增大（理想情况下熵不变），那么这些熵变化如何呢？按照

文献 [5] 的论述：一个系统的熵变化由熵流动与熵产生所组成，被称为局域熵守恒定理[5]：

$$\frac{\partial S_v}{\partial t} = -\nabla \bullet \vec{J}_S + P \tag{23}$$

其中，$\vec{J}_S$ 是三维熵流；P 是熵产生；把总熵对时间的微分写出来，得：

$$\frac{dS_v}{dt} = \frac{dS_e}{dt} + \frac{dS_i}{dt} \tag{24}$$

上式，右边第一项是总熵流，可正可负；第二项为总熵产生 P ⩾ 0。

下面重点述说总熵产生：它对时间的变化率为：

$$\frac{dp}{dt} \le 0 \tag{25}$$

对于非定态的情况，$\frac{dp}{dt} < 0$；而对于定态情况，$\frac{dp}{dt}=0$。

上式的物理意义是，线性非平衡区域的系统随着时间的发展总是朝着熵产生减少的方向进行，直到达到一个稳定态，此时熵产生不再随时间而变化，达到$\frac{dp}{dt}=0$，此时 P 达到极小值，因此，（25）式称为最小熵产生原理。

因为不可逆过程的熵增加是使得能量的可利用的程度降低了，也就是使得有用能量耗散或称“贬值”了，而最小熵产生原理就是使得有用能量的耗散速率达到最少值，这就是大自然的规律之一。

5 结语

此文利用梯度场及变分法的理论与方法，推导出：

①自然界的物质的各种量（如质量，动量，能量，电量等等）沿着等势线的梯度降落的方向流动的，并且其数值的大小与梯度的绝对值的大小成正比。

②并解开了作用量的真正物理含义：它就是四维时空的动量势函数。

③最小作用量原理就相当于物体的动量及能量在四维时空中运动及变化中取得最大的转移量与转变速率。物质在四维时空中运动及变化，若无损耗时则它们以最快的速度、最短的时间达到最大的传输量（包括但不限于以上诸通量）。

④在耗散结构的非保守场中（如热力运动及化学变化），则选择最少损耗的路径或最小耗散的方式进行传输，这等价于最小熵产生率定理。它的原理就是使得有效能量的耗散速率达到最小值，并使得有效能量达到最大的保有量。

上述所有的定理适用于力学、光学、电磁学、热力学以及量子力学，在物质高速运动时的相对论动力学等全部的物理变化过程，也适用于化学及原子的物质变化的全过程。把它们与（动量、能量，质量、电量等守恒定律）放在一起，就组成一幅和谐的自然景观。

参考文献

[1] 老大中.变分法基础[M].第3版.北京:中国高教出版社,2004.

[2] [苏]亚.索.康帕涅茨.理论物理学[M].北京:人民教育出版社,1960.

[3] N. manton N. mee. AnInspirational of Fundom emtal physics(后费曼物理学讲义)[M].李新洲,译.上海:上海科技出版社,2021.

[4] 龙球.能量原理新论[M].北京:中国建筑工业出版社,2007.

[5] L 普利高津.普利高津与耗散结构[M].北京:中国科技出版社,1992.