

# New Solutions to Promote the Resolution of Problems for Students with Learning Disabilities—Using Number Lines to Solve Mathematical Word Problems

Yin Hui Zhengbo Yin Fengwang Xu

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

## Abstract

The ability to solve mathematical problems plays a core role in every aspect of classroom teaching, and the cornerstone of its success undoubtedly lies in how to transform text-based mathematical problems into easily understandable forms. The paper explores in depth the innovative strategy of using the number axis as a tool to visualize and represent complex textual problems. The implementation of the strategy consists of two key steps: transforming textual problem descriptions into concise and clear mathematical and natural language; By carefully designing a number line model, the quantity relationship and structure in the problem are visually displayed, helping students construct clear problem-solving ideas. The paper deeply analyzes the educational value of the number line representation strategy and extracts several core points that need to be focused on in teaching practice, aiming to guide teachers to use this strategy more effectively and enhance students' mathematical problem-solving ability.

## Keywords

mathematics struggling students; potential students; number axis; problem solving representation strategy

# 促进潜力生问题解决的新方案——利用数轴解决文字类数学问题

惠尹 尹正波 徐凤旺

贵州师范大学数学科学学院, 中国·贵州 贵阳 550025

## 摘要

数学问题解决能力在课堂教学的每一个环节均扮演着核心角色,其成功的基石,无疑在于如何将文字类数学问题转化为易于理解的形式。论文深入探讨了运用数轴作为工具,对复杂文字类问题进行直观化、可视化表征的创新策略。策略实施分为两大关键步骤:将文字问题描述转化为简洁明了的数学语言与自然语言;通过精心设计的数轴模型,直观展示问题中的数量关系与结构,帮助学生构建清晰的解题思路。论文深入剖析了数轴表征策略的教育价值,并提炼出教学实践中需重点关注的几个核心要点,旨在指导教师更有效地运用此策略,提升学生的数学问题解决能力。

## 关键词

数学学困生; 潜力生; 数轴; 解题表征策略

## 1 问题的提出

随着时代的发展,数学已经渗透到了人们生活的方方面面,成为现代社会不可或缺的一部分。数学是一门以问题驱动为主的学科,随着数学应用领域的不断拓宽,大众对于解决数学问题的需求也日益增加。《义务教育数学课程标准(2022年版)》在“核心素养的内涵”部分强调“能够合乎逻辑地解释或论证数学基本方法与结论、分析、解决简单的数学问题和实际问题”“能够在现实生活与其他学科中构建普适的数学模型,表达与解决问题”<sup>[1]</sup>。《普通高中数学

课程标准(2017年版2020年修订)》在“基本理念”部分指出:“精选课程内容,处理好数学学科核心素养与知识技能之间的关系,强调数学与生活以及其他学科的联系,提升学生应用数学解决实际问题的能力,同时注重数学文化的渗透。”<sup>[2]</sup>因为课程标准指导着学生与教师的评价,因此数学问题解决在数学教学中占有十分重要的地位。而其中,大部分问题以文字类问题的形式呈现,因此解决文字类数学问题的能力对每一位学生而言都是至关重要的。论文主要讨论如何使用“数轴”作为文字类问题的可视化表征工具,为教师进行解题表征教学提供参考。

【作者简介】惠尹(2001-),女,中国云南宣威人,硕士,从事数学教育研究。

## 2 视觉表征策略的重要性

大量研究表明,有5%~10%的学生在高中毕业之前会在数学的某个领域或是某几个领域中经历学习困难<sup>[3-6]</sup>。数学学习潜力生(以下简称“潜力生”)在数学学习中会遇到的困难包括:对数学基本事实存在记忆困难、对概念性知识理解匮乏、解决数学问题存在困难等<sup>[7]</sup>。

解决文字类问题是一个复杂的认知过程——学生要主动地了解题目相关信息,并依据问题的有效信息产生相应的解决问题的心理模型,最后依据这个心理模型决定可行的问题解决路径<sup>[8]</sup>。除此以外,文字类数学问题的解决还要求学生结合之前学过的知识来解决相关的问题,因此对于潜力生来说文字类问题解决十分具有挑战性,因为其包含了高阶逻辑思维以及知识迁移。研究表明,在解决问题时潜力生在问题的表征技巧上存在着缺陷<sup>[9]</sup>。问题表征是问题解决过程的第一个阶段,在表征过程中,问题解决者将问题转化为个人的理解,并且将问题中的信息融合为数学、视觉或是心理模型<sup>[10]</sup>。正确表征数学问题是解决数学问题的关键步骤。不论对于普通学生还是潜力生,糟糕的视觉表征能力与糟糕的数学问题解决能力是紧密相连的<sup>[11,12]</sup>。潜力生在解决问题时,不仅比普通学生产生更少的表征,并且潜力生产生的表征也没能正确表示出问题信息之间的内在联系<sup>[13]</sup>。

视觉表征是一种特定的问题表征策略,它为学生提供了问题解决的视觉参考,从而降低了解决问题过程中对潜力生工作记忆的需求,允许学生在解决问题的过程中进行自我调节,帮助学生建立对于问题中包含的核心概念的理解,有助于教师对学生解题过程进行监控与分析错误产生的原因<sup>[14]</sup>。

此外,大量研究<sup>[15-17]</sup>表明:为了更有效地匹配潜力生的学习特点和需求,相较于掌握大量针对单一问题的具体策略,推广少量但具有广泛适用性的数学问题解决策略显得更为优越。这些策略不仅能够跨越多种数学情境,还能促进学生在面对不同复杂程度的问题时,具备更强的迁移能力和解题灵活性<sup>[18]</sup>。寻找一种可以在多个年级的数学学习中可以广泛使用的数学问题解决模型应该是教师对潜力生教学的目标。

综上所述,针对视觉表征进行教学对潜力生解决文字类问题十分重要。然而在实际课堂教学中,虽然教师知道教授问题表征技巧的重要性,但不少教师缺乏有效进行表征技巧教学的能力。

## 3 数轴表征策略

数轴在许多数学概念的教学中都有运用,但是被用于可视化表征,辅助解决数学问题的研究却很少见。在教学上,教师要系统化地针对利用数轴表征文字类问题才能真正使学生获益其中<sup>[19]</sup>。

利用数轴作为解决问题的表征优点如下:①促进解题思维的组织:数轴是一种图画式的表征方式在解决问题过程

中起到脚手架的作用,数轴的使用逐渐将学生的注意力从思考问题的情境转移到思考所涉及的数字之间的关系上;②形成头脑中的“数轴”:随着教师引导使用数轴解决从简单到复杂的数学问题,潜力生能够逐渐在头脑中形成“数轴”,有助于之后解决数学文字问题<sup>[20]</sup>;③辅助教师进行教学判断:数轴的使用可以方便教师检查学生对于问题的表征,因此教师可以利用数轴来快速识别与矫正学生思维中存在的误区,以决定下一步的教学如何实施。

使用数轴进行问题解决教学时,主要分为两个部分:①转述文字类问题;②解读数轴表示,见图1。

使用数轴指导问题解决的教学两步骤	
第一步:转述文字问题	第二步:解释数轴表征
确定需要解决的问题的有效信息 在数轴上展示问题各个部分相关信息之间的联系,包括问题的未知信息 针对问题检查数轴表征是否正确	确定解决问题需要几步 检查表征的结构 选择恰当的运算 依据数轴表征检查解题计划

图1 使用数轴指导问题解决教学的两步骤

### 3.1 步骤一:转述数学文字类问题

解决文字类问题的第一步是学生能够用自己的语言转述相关的数学问题。数轴表征通过将问题以图画形式表示出来,弥合了语言理解与数学理解之间的差距。在这一过程中,3类重要的信息必须表示在数轴上:题目中的有效信息、信息的内在联系、题目的问题以及它与其他信息的联系。

#### 3.1.1 确定题目中的有效信息

首先教师应该引导学生用自己的语言转述文字类问题。潜力生要能够准确地表述他们找到了什么有效信息,信息之间有什么关联、问题要解决什么等。可以利用下划线与删除线对问题进行简单处理:将重要信息用下划线信息画出,将无关信息用删除线划掉。数轴上放置不相关的信息会导致问题表述令人分心且不准确,增加认知负担,从而增加得出错误答案的概率<sup>[21]</sup>。

#### 3.1.2 展示题目信息间的内在联系

在确定了题目中的有效信息以后,最重要且对于潜力生来说最困难的一步是:确定有效信息之间的内部关联。因为信息之间的内部联系给学生提供了解决问题的框架,教师应该给潜力生提供问题内在联系表征的细节示范,并提供大量实践与试错的机会。

#### 3.1.3 标注题目未知部分以及与其他信息之间的关联

教师应当引导潜力生将问题的未知部分标注在数轴上,并用问号对其进行标识。对于需要多步骤才能解决的问题,就应该有不止一个问号表示在数轴上,并且圈出最后一个问号以便于确定解决问题步骤间的顺序关系。

在数轴表征的构建步骤完成以后,还需要对问题与数

轴进行检查以确保表征是正确的，并且可以展示信息间的内在联系。可以按照图2的提示卡进行回顾，随着对数轴表征使用的熟练，提示卡的使用也应该减少直到潜力生形成心理的“提示卡”<sup>[19]</sup>。

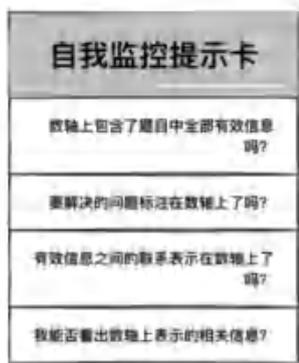


图2 回顾数轴构建自我提示卡

### 3.2 步骤二：解释数轴表征

首先，教师应当引导潜力生建立起一种系统化的思考方式——引导潜力生仔细观察并判断数轴存在的未知元素或变量的个数。通过这一步骤，学生能够对问题的复杂性有一个初步的认知，并据此判断解决问题大致需要多少个步骤。这种预判能力不仅有助于提升学生的问题解决效率，还能培养他们在面对复杂问题时的条理性。

其次，对于那些需要多步才能彻底解决的问题，教师应当引导学生深入理解问题结构，明确哪一部分或哪一步骤是最终求解的目标。这一步骤至关重要，因为它直接关系到计算顺序的确定。正确的计算顺序能够确保学生在解题过程中避免无效劳动，从而更加高效地找到问题的答案。

最后，在解题的每一个环节，潜力生都应当学会将数轴上的信息与基础运算法则相结合。这要求他们不仅要熟练掌握运算的基本规则，还要能够灵活运用这些规则来解决实际问题。通过不断的练习和思考，学生可以逐渐建立起数与形之间的桥梁，形成更加深刻的数学直觉和解题能力。

### 3.3 数轴可视化表征策略案例分析

以《(根据2022年版课程标准修订)义务教育教科书 数学七年级上册》第一章《有理数》和第五章《一元一次方程》中例题习题为例，下文给出了几个如何利用数轴对文字类问题进行表征的案例。

① 10袋小麦称后记录(单位: kg), 如图3所示, 10袋小麦一共多少千克? 如果每袋小麦以50kg为质量标准, 10袋小麦总计超过多少千克或不足多少千克?

在第一问中, 利用数轴分别将十袋小麦的重量表示出来, 题目第一问要求的未知量是十袋小麦的总质量, 所以得到图3中左下角的数轴表示。接下来到了第二问, 此时是要比较这十袋小麦的质量和十袋标准小麦的质量相差多少, 用两个数轴分别表示这十袋小麦的质量和标准情况下十袋小

麦的质量, 他们在数轴上相差的部分就是我们第二问要解决的问题。

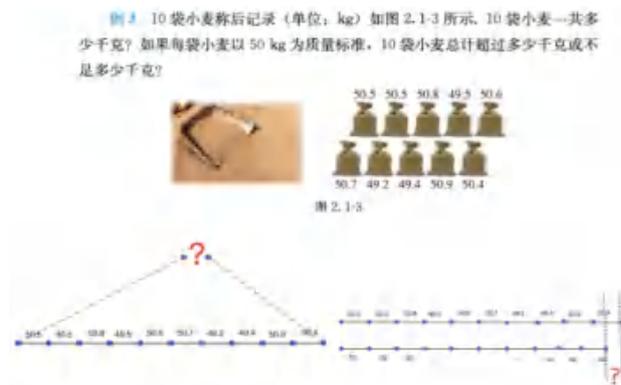


图3 例1的数轴表征

②如图4所示, 陆地上最高处是珠穆朗玛峰的峰顶, 最低处位于亚洲西部名死海的湖, 两处高度相差多少米?

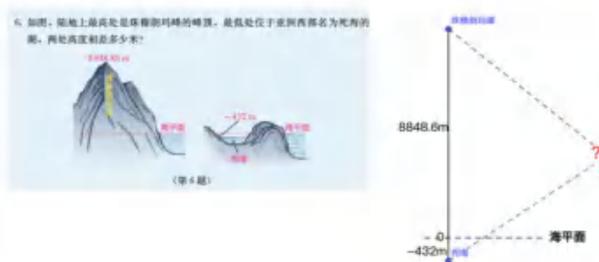


图4 例2的数轴表征

例2是利用纵向的数轴进行问题表征的一个例子。将珠穆朗玛峰表示在纵向数轴的最高点, 将死海表示在最低点, 而海平面定义为原点所在处。此时问题转化成为求这一整数轴的长度, 将原来的问题转化为了一个加法问题。

③在北京2022年冬奥会上, 中国代表团共获得15枚奖牌, 其中金牌数比银牌数多5枚, 银牌数比铜牌数多2枚, 中国代表团一共获得多少枚金牌(见图5)?

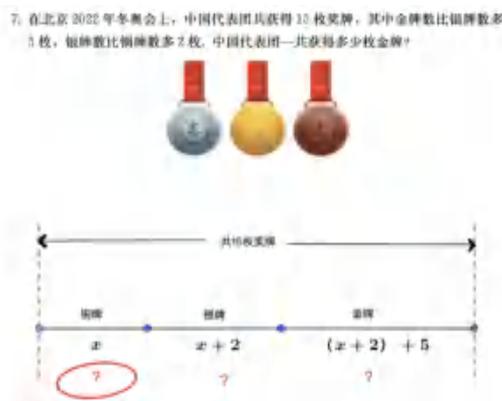


图5 例3的数轴表征

例3是一个一元一次方程问题, 利用数轴分别把铜

牌、金牌、银牌的数量表示出来，并标注已知量是一共有十五枚奖牌，未知量是铜牌的个数、银牌个数、金牌个数，最终的未知量是铜牌个数，由此可以找到等式列出方程： $x+(x=2)=(x+2+5)=15$ 。

综上所述，使用数轴作为文字类问题的表征手段时，第一步是转述文字类问题；第二步是解释数轴的表征。数轴表征有助于解决文字类问题。

## 4 数轴表征策略理解与教学要点

### 4.1 对于数轴表征基础概念的理解

为了有效地使用数轴，教师必须明确数轴这一数学工具的两个基本理念：①数轴是文字类问题的图形化表示，因此每一个点都代表着重要的信息；②数轴是一个测量模型，标记的数字代表一定的长度而不是任意的点<sup>[22]</sup>。这意味着，教师在教授数轴表征策略时，应该引导学生思考标记的线段之间的距离/数量以及他们随着数轴的延伸而产生的距离/数量的累积。

想要使用数轴表征策略来解决问题，熟练地进行运算是基本前提。如果没有掌握运算相关的概念与技能，潜力生就没有办法根据数轴表征中观察到的关系提出正确的解题计划。因此，教师在进行教学前应该对运算的概念进行全面的复习。

### 4.2 对于数轴表征教学进度的理解

在进行数轴表征策略的教学过程中，教师必须对学生学习进度进行监控，并依据监控结果有针对性地调整教学。为了让潜力生真正掌握和保持使用数轴表征这种可视化策略，教师教学应该分层，逐步增加题目的复杂程度。教学应该先介绍只有一步的简单数学情境问题，逐步过渡到复杂的情境问题：包含多步骤的问题或是含有更高级的数学概念的任务。为了决定教学的速度，教师可以周期性地测量学生的数轴表征能力以及实际解决问题的能力。教师既可以通过课堂讨论与观察来非正式地测量，也可以通过迈阿密大学的 Nicola Gonsalves 和 Jennifer Krawec 开发的测量表来正式地测量与评价（图 6）<sup>[19]</sup>。

评价元素	0	1	2	评价
是否包含重要信息	没有包含信息	包含一些信息	包含全部信息	
是否正确地表示信息之间的顺序	没有正确地表示	一部分被正确地表示了	全部正确地表示了	
是否排除非相关信息	存在不相关信息	——	没有不相关的信息	
是否包含了题目问题	没有包含	包含但不正确	包含且正确	
				总分

图 6 Nicola Gonsalves 和 Jennifer Krawec 开发的数轴表征能力测量表

此外，潜力生可能一开始难以理解数轴表征的抽象性，这时教师在教学过程中还可以采用“CRA（具体—表征—抽象）序列教学法”<sup>[23,24]</sup>。这种教学法强调通过三个连续的阶段——具体、表征和抽象——来促进学生的数学学习，旨在帮助学生从具体的材料出发，逐步过渡到抽象的符号层面，

从而更深入地理解数学概念并提高其解决数学问题的能力。

### 4.3 对于数轴表征的局限性的理解

但是，数轴视觉表征用作解决数学问题的一种策略也存在着不足之处。

其一，学生为解决文字类问题而构建的数轴可能并不是数学定义中的数轴。虽然潜力生在使用数轴表征之前，必须接受关于数轴的概念、结构、含义的明确指导，但是随着使用数轴表征的熟练程度的提高，他们可以对数轴模型进行修改以适应自己的解题风格。教师可以对潜力生的数轴进行修改与纠正，但是潜力生产生的一些模型是他们将其“个性化”的表现，并不会影响模型的准确性。就像 Cleveland 和 McGill（1985）认为：图表的力量在于它能够使人们获取定量的信息，对其进行组织，并发现不易通过其他方式揭示的模式与结构<sup>[25]</sup>。

其二，数轴可视化问题表征策略，确实帮助学生理解和解决特定类型的数学问题方面展现出了独特的优势。然而，值得注意的是，这种策略并非万能钥匙，不能机械地应用于学生在数学课程中遇到的所有类型和复杂度的问题上。数学课程的内容广泛而深邃，涵盖了多个领域。在这些领域中，问题的形式、结构和所需解决策略往往大相径庭。因此，教师在教授数学课程时，应引导学生灵活运用多种问题表征策略。

总而言之，将抽象的数学文字问题转化为具体而直观的心理图像或视觉模型，是显著提升文字类问题解题技巧的一项核心策略。数轴，作为这一转化过程中的得力助手，为学生搭建起一座连接文字描述与数学逻辑的桥梁，其清晰直观的特性使得复杂问题变得易于把握且灵活处理。当教育者遵循本文所阐述的关于数轴解题教学的精髓进行教学时，学生们，特别是潜力生，将深刻体会到数轴作为工具在提升解决数学文字问题能力上的价值。数轴不仅简化了问题的呈现方式，更激发了学生对数学概念的深入探索与理解。

### 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版,2022.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [3] Badian N A. Dyscalculia and nonverbal disorders of learning[J]. 1983.
- [4] Barbaresi W J, Katusic S K, Colligan R C, et al. Math Learning Disorder: Incidence in a Population-Based Birth Cohort, 1976–82, Rochester, Minn[J]. *Ambul Pediatr*, 2005,5(5).
- [5] Ostad Snorre A. Comorbidity between mathematics and spelling difficulties[J]. *Logopedics Phoniatrics Vocology*, 1998.
- [6] Shalev R S. Prevalence of developmental dyscalculia[J]. 2007.
- [7] David C Geary, et al. Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled

- children[J]. *Journal of Experimental Child Psychology*, 1992,54(3):372-391.
- [8] Montague, Marjorie, Warger, et al. Solve It! Strategy Instruction to Improve Mathematical Problem Solving[J]. *Learning Disabilities Research & Practice* (Lawrence Erlbaum), 2000.
- [9] Miller, Peterson S, Hudson, et al. Designing and implementing mathematics instruction for students with diverse learning needs[M]. Pearson/Allyn and Bacon, 2006.
- [10] Mayer R E. Problem solving. In D. Reisberg (Ed.), *The Oxford handbook of cognitive psychology*[M]. New York, NY: Oxford University Press, 2013.
- [11] Hegarty M, Kozhevnikov M. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving[J]. *Journal of Educational Psychology*, 1999,91(4):684-689.
- [12] Krawec J L. Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability[J]. *Journal of Learning Disabilities*, 2012,47(2):103-115.
- [13] Zhang D, Xin Y P. A Follow-Up Meta-analysis for Word-Problem-Solving Interventions for Students with Mathematics Difficulties[J]. *Journal of Educational Research*, 2012,105(5):303-318.
- [14] Garderen V ,D. Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities[J]. *Journal of Learning Disabilities*, 2006,39(6):496-506.
- [15] Fuchs L, Zumeta R, Schumacher R, et al. The Effects of Schema-Broadening Instruction on Second Graders' Word-Problem Performance and Their Ability to Represent Word Problems with Algebraic Equations: A Randomized Control Study[J]. *Elementary School Journal*, 2010,110(4):440-463.
- [16] Griffin C C, Jitendra A K. Word problem-solving instruction in inclusive third-grade mathematics classrooms[J]. *Journal of Educational Research*, 2009,102(3):187-201.
- [17] Jitendra A, Dipipi C M, Perron-Jones N .An Exploratory Study of Schema-Based Word-Problem—Solving Instruction for Middle School Students with Learning Disabilities An Emphasis on Conceptual and Procedural Understanding[J]. *Journal of Special Education*, 2002,36(1):23-38.
- [18] Montague M. Solve it: A mathematical problem-solving instructional program[M]. Reston, VA: Exceptional Innovations, 2003.
- [19] Gonsalves N, Krawec J. Using Number Lines to Solve Math Word Problems: A Strategy for Students with Learning Disabilities[J]. *Learning Disabilities Research & Practice*, 2014,29(4):160-170.
- [20] Krawec J L. Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability[J]. *Journal of Learning Disabilities*, 2012,47(2):103-115.
- [21] Kolloffel B , Eysink T H S , Jong T D ,et al. The effects of representational format on learning combinatorics from an interactive computer simulation[J]. *Instructional Science*, 2008,37(6):503-517.
- [22] Diezmann C M, Lowrie T, Sugars L. Primary students' success on the structured number line[J]. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 2010,15(4):24-28.
- [23] Mancil D B , Miller S P , Kennedy M .Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence with Integrated Strategy Instruction to Teach Subtraction with Regrouping to Students with Learning Disabilities[J]. *Learning Disabilities Research & Practice*, 2012,27(4):152-166.
- [24] Mercer C D, Miller S P. Teaching Students with Learning Problems in Math to Acquire, Understand, and Apply Basic Math Facts[J]. *Remedial & Special Education*, 1992,13(3):19-35.
- [25] Cleveland W S, McGill R .Graphical perception and graphical methods for analyzing scientific data[J]. *Science*, 1985,229(4716):828-833.