 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v7i14.22045

Research and Analysis of Logical Function and Its Inverse Operation

Zhixin Huang

Guangzhou Liwan District Science and Technology Association, Guangzhou, Guangdong, 510000, China

Abstract

In this paper, according to the operation law of the logic function, the Boolean algebra, propositional logic, switch algebra are unified, called they are logical function. And study the reverse operation of logic function: the reverse operation of Logic Addition: Llogic Subtraction, and the reverse operation of Logic Multiplication: Logic Division. Then the truth value of Logic Subtraction and Logic Division, so as to determine the operation rules of logic subtraction and logic division. Finally, the calculation method of logical addition, subtraction, multiplication and division is used to simplify the logical formula and settle the logical equation, and then the application of logical function in switching circuit and logicalinverse reasoning (such as the process of police solving crimes) is mentioned.

Keywords

logical function; inverse operation of logical function; logical subtraction; logic division; solve logic equation

逻辑函数及其逆运算的研究与分析

黄志新

广州市荔湾区科技协会，中国 · 广东 广州 510000

摘　要

论文首先根据逻辑函数的运算规律，把布尔代数，命题逻辑，开关代数统一起来，称为逻辑函数。并引进逻辑函数的逆运算：即逻辑加的逆运算——逻辑减，及逻辑乘的逆运算——逻辑除；继而根据逻辑加与逻辑乘的真值表求得逻辑减及逻辑除的各种真值，从而确定逻辑减及逻辑除的运算规律。最后用逻辑函数加、减、乘、除的方法去简化逻辑式子及求逻辑方程与方程组的各种解的集合；并且提及逻辑函数逆运算在开关电路及命题逆推理（如警察破案过程）的运用。

关键词

逻辑函数；逻辑函数的逆运算；逻辑减；逻辑除；解逻辑方程

1 引言

现有的数理逻辑大家已经研究得较多，也较为深入了。但有两个个奇怪的现象：

其一，有三种不同的代数（或叫函数）：布尔代数、命题代数、开关代数，它们应用在不同的领域，具有不同的符号，但都具有相同的运算规律，而同一本书，要把三种函数分别写出来，无端的增加了书本的篇幅，学生要分别学习三种函数的章节，增加了学习分量，延长了学习时间。论文考虑把这三种函数统一为一种函数，叫作“逻辑函数”这样就可以达到举一反三，减负增效的效果了。

其二，一般的函数都有其逆函数，而逻辑函数却没有逆函数，这就奇怪了。作为教学及科研的需要，论文特别提出了逻辑逆函数的概念，并且对其进行深入的研究，以下就是一些研究心得，以供同行们参考。

【作者简介】黄志新（1960–），男，中国浙江杭州人，本科，工程师，从事数学、物理、工程发明等研究。

2 统一的逻辑函数

逻辑函数包括布尔代数、命题代数和开关代数，它们计算规律一致，但应用领域和符号不同。目前，命题逻辑符号和推理系统在书籍和论文中更常见，而数字电子计算机领域偏好使用逻辑开关代数。这导致了逻辑函数的重复介绍。为统一和简化，本文主要采用布尔函数，并结合开关代数和命题代数的特定元素，形成统一的新逻辑函数。

下面首先定义一个离散数学的名词：

定义 1：A 被称为逻辑函数的集合，它包括命题代数与开关代数，布尔代数等：A={$a1$，$a2$}={0，1}；其中元素 0，在开关代数里被称为“关”，在命题代数里被称为“假”符号为 F；而元素 1，在开关代数里被称为“开”，在命题代数里被称为“真”符号为 T。

它的全集等于永真式 $\Omega=\begin{cases}0\\1\end{cases}$。

空集为矛盾式 $\Phi\neq\begin{cases}0\\1\end{cases}$。

注意：空集为矛盾式，并不等于 0，即$0 \notin \Phi$，因为在逻辑函数中 0 是逻辑集合的一个基本元素，而空集$\boldsymbol{\Phi}$则表示该逻辑函数的集合里什么元素都没有。现在逻辑函数的各种运算符号如表 1 所示。

表 1 现在逻辑函数的各种运算符号

名称	逻辑函数	布尔代数	开关代数	命题代数
逻辑集合	Ω，全集		永通	永真式，重言式
	Φ，空集		永断	永假式，矛盾式
真	1	1	1，开通	T，真
假	0	0	0，断路	F，假
逻辑非	—	—，补元	—，非门	¬，否定
逻辑加	+	+，布尔和	+，或门	∨，析取
逻辑乘	●	●，布尔积	●，与门	∧，合取
蕴含	→			→
等于	=	=	=	↔，等价

注：①表中同一列，表达同一种逻辑函数的不同的应用与表达方式。②表中第 2 列为新统一定义的逻辑函数的各种运算符号，而其余各列为现在通用的各种逻辑运算符号。③表中同一行的符号，代表着同一种逻辑运算，以及相似的逻辑思维判断。

3 逻辑函数的逆运算

逻辑函数运算包括逻辑非、逻辑加、逻辑乘、蕴含和等价等。这些被认为是完备的，但类似于普通代数的运算，尽管加减乘除已足够，乘方、开方、对数等运算的发展使代数更高级、完美。因此，为了提升逻辑函数的便利性和完美度，本文引入了逻辑函数的逆运算，并定义了其计算方法[1]。

3.1 逻辑非的逆运算

若有，$B=\overline{A}$。

容易看出，其逆函数为：$A=\overline{B}=\overline{\overline{A}}$。

即它们互为逆运算，或原函数取两次逆运算就可以了。

下面重点说说逻辑加与逻辑乘的逆运算。

3.2 逻辑加的逆函数——逻辑减

定义 2：逻辑加的逆运算被定义为逻辑减，记号为“—”，与普通代数的减号一致。

根据现有的逻辑加法：$A+B=C$，则逻辑减记为：

$$A=C-B \text{ 及 } B=C-A$$

逻辑减的真值表如表 2 所示。

表 2 逻辑减的真值表（从逻辑加的逆运算推导求出）

编号	1）	2）	3）逻辑加	4）逻辑减 5）	
	A	B	$C=A+B$	$C\text{-}B=A$	$C\text{-}A=B$
1）	0	0	0	0-0=0	0-0=0
2）	0	1	1	1-1=0	1-0=1
3）	1	0	1	1-0=1	1-1=0
4）	1	1	1	1-1=1	1-1=1

逻辑减的运算规律有以下三种（与一般代数的“—”运算比较）：

①符合一般代数的运算规律，具有唯一性。

表 2 数据的一、二行都有符合一般代数的运算的唯一性规律：

0-0=0，（1 行），1-0=1，（2 行，5 列）

②一种运算两个结果（全集）的情况，即：

$$1\text{-}1=\Omega=\begin{cases}0, & \text{(第3行,5列)}\\ 1, & \text{(第4行,4,5列)}\end{cases}$$

③结果为空集（无解）：

0-1，在一般代数中等于（-1），但是由于逻辑函数没有负数，从上面真值表中找不到答案，因此其答案为空集可以记为：

$$0\text{-}1=\Phi \neq \begin{cases}0\\ 1\end{cases}$$

3.3 逻辑乘的逆运算——逻辑除

定义 3：逻辑乘的逆运算被定义为逻辑除，记号为“/”，与普通代数的除法定义一致。

逻辑除的运算规律（与一般代数的“÷”运算比较）：根据现有的逻辑乘法：$A \cdot B=C$，其函数为：$A=C/B$ 及 $B=C/A$。逻辑除的真值表如表 3 所示。

表 3 逻辑除的真值表（从逻辑乘的逆运算推导求出）

编号	1）	2）	3）逻辑乘	4）逻辑除 5）	
	A	B	$C=AB$	$A=C/B$	$B=C/A$
1）	1	1	1	1/1=1	1/1=1
2）	0	1	0	0/1=0	0/0=1
3）	0	0	0	0/0=0	0/0=0
4）	1	0	0	0/0=1	0/1=0

逻辑除的计算中有以下的结果：

①符合一般代数除法运算的唯一性规律：1/1=1（表中 1 行）；0/1=0（表中 2 行 4 列）。

②计算中的答案具有全集解：$0/0=\Omega=\begin{cases}0, & \text{(第3行,4,5列)}\\ 1, & \text{(第4行,4列)}\end{cases}$。

即一种运算有两个结果。

③还有一种情况是空集：

$$1/0=\Phi \neq \begin{cases}0\\ 1\end{cases}$$

在一般代数中有 1/0=∞，但是由于逻辑函数没有∞，因此从上面真值表中找不到答案，只能记它为空集$\boldsymbol{\Phi}$。

若在推理或计算过程出现空集的情况，可以把它们马上删去，用其余有解的结果继续推理或计算，不会影响结果的正确性[2]。

4 逻辑逆运算的等值变换

逻辑逆函数的等值变换如表 4 所示。

表 4 逻辑逆函数的等值变换

序号	等值变换式	名称
1	$\bar{\bar{A}}=A$.	双重否定律
2	A-0=A. A/1=A. A-$\bar{A}$=1，且 A=1 A/$\bar{A}$=0，且 A=0	归一律
3	1-A=Ω . A-1=Ω，且 A=1. 0/A=Ω . A/0=Ω，且 A=0	支配律
4	A-B+C=A+C-B. $A/B\bullet C = A\bullet C/B$. A-B-C=A-C-B. $A/B/C = A/C\,/\,B$	三值交换律，注意：第一位被减数（或被除数）不能改变；只能是减数（除数）里有交换律。连”-”，”/”号一起交换
5	（A-B）-C=A-（B+C） （$A/B\;/C = A/(B\bullet C)$	结合律，变括号后，括号内变号
6	a)（ A - B) / $C = (A/C)-(B/C)$ b)（A/B)-$C = (A$-$C)/(B$-$C)$ c)（ A+B) / $C = A/C+B/C$. $d)(A-B)\bullet C = A\bullet C$-$B\bullet C$	分配律
7	$a)\overline{A/B} = \bar{A}-\bar{B}$ $b)\ \overline{A-B} = \bar{A}/\bar{B}$	德摩根定律

注：上面公式中凡是全集用 Ω 表示；空集用Φ表示，计算或推理中出现Φ应舍弃。

4.1 逻辑函数的优先顺序（从高到低，基本与普通代数一致）

①即先算括号内的运算，再算括号外的。

②没有括号的计算顺序：$\bar{\ },(\cdot,/),(+,-),\rightarrow,(\leftrightarrow,=)$，即非，（乘，除），（加，减），（蕴含），（等价，等于）。

4.2 加括号与去括号

①若括号前为”+”号，则括号里原加，减号不变。

若括号前为”•”号，则括号里原乘、除号不变。

②若括号前为”—”号，则括号里原加、减号互变。

若括号前为”/”号，则括号里原乘、除号互变。

所谓互变，就是说加变减，减变加；乘变除，除变乘。

4.3 对偶原理

对仅含有 $\bar{\ },(\cdot,/),(+,-),\rightarrow,(\leftrightarrow,=)$ 几种运符号的逻辑函数公式 A，将”—”与”/”互换，同时也将”+”与“/”互换，所得新的逻辑函数 A^* 称为原逻辑函数公式 A 的对偶式。

4.4 逻辑逆函数的等值变换

4.4.1 证明分配律

①证 6a）式：$(A/C)-(B/C)$=$(A-B)/C$ 。

证：（$A-B\;/\;C = [A+(-B)]/\;C$

$= (A/C)+[-(B)]/C$

$= (A/C)-(B/C)$

②用对偶性证明证明 6b）式：（A/B)-$C = (A$-$C)/(B$-$C)$ 。其余证明类似。

③证明 6c）式：

$(A-B)/C$

$=[A+(-B)]/C$

$= A/C+(-B/C)$

$= A/C-B/C.$ 证毕。

④用对偶性可以证明 6d）式：$d)(A-B)\bullet C = A\bullet C$-$B\bullet C$ 。

4.4.2 用真值表证明第 9 类的德摩根定律

第 9 类的德摩根定律如表 5 所示。

表 5 第 9 类的德摩根定律

A	B	9a）式		9b）式		备注
		左边	右边	左边	右边	
1	1	0	0	0，1	0，1	9b 两边均为Ω
1	0	Φ	Φ	0	0	9a 两边均为Φ
0	1	1	1	Φ	Φ	9b 两边均为Φ
0	0	0，1	0，1	1	1	9a 两边均为Ω

说明：

①德摩根定律在逻辑逆函数的正常计算的结果，无论

是正常的唯一值，还是全集 Ω 中都是成立的。

②就算在计算途中出现异常的空集 Φ，也是等式两边同时出现，德摩根定律同样成立的。

③所以德摩根定律在逻辑逆函数的计算中，是无条件成立的 [3]。其余的等值变换证明比较简单，留作习作给读者做。

5. 逻辑函数逆运算的应用

5.1 逻辑函数逆运算在解逻辑方程中的作用

逻辑方程（或方程组）的化简目前缺乏类似代数方程的直接运算方法，如同时加减或乘除。原因在于逻辑函数没有逆运算。定义了逻辑逆函数及其规则后，我们可以开始研究逻辑方程（或方程组）的运算方法。

5.2 逻辑逆运算在解逻辑方程中的要点

①现有应用较广的逻辑函数方程的（0，1）解法继续保留。

②逻辑函数方程未确定的变量（即未知数 x，及未确定的数值，如 A，B 等），不能进行移项的运算。

③已确定的变量（0，1）可以进行移项运算，被移项的式子要变号（与普通代数方程一样）。

5.3 把逻辑方程化简为一些常量

①利用归一律，补元律把变量合并为确定的常量：

$A+\bar{A}=1$；$A\text{-}\bar{A}=1$，且 $A=1$。

$A\bullet\bar{A}=0$；$A/\bar{A}=0$，且 $A=0$。

$\bar{A}-A=1$，且 $A=0$；

$\bar{A}/A=0$，且 $A=1$。

5.4 可以利用吸收律、等幂律等消去一些多余的未知变量

$$A+AB=A$$

$$A（A+B）=A$$

$$A+A=A$$

$$A\bullet A=A$$

例：化简并求解下面的逻辑方程组：

$$\begin{cases}\bar{A}+B\bar{C}=1 & （1）\\ A=1 & （2）\\ AC+AD+DE=0 & （3）\end{cases}$$

解：把（2）代入方程组的（1）和（3）两式，原方程组变为：

$$\begin{cases}B\bar{C}=1 & （4）\\ C+D+DE=0 & （5）\end{cases}$$

把（4）式化为：

$$B=1/\bar{C} \qquad （6）$$

按约束条件：$\bar{C}\neq 0$，而应该：$\bar{C}=1$，则 $C=0$。

把（6）式代入（5）式中，并用吸收律把它化简为：

$$D=0 \qquad （7）$$

把（6）式代入（4）式，求得：

$$B=1 \qquad （8）$$

把（6），（7）式代入（5）式，求得：

$$0\bullet E=0，E=0/0=\Omega \qquad （9）$$

检验：把（2），（6），（7），（8），（9）等结果代入原方程组，各方程全部成立，因此：$A=1$，$B=1$，$C=0$，$D=0$，$E=\Omega$（0，1），是该方程组的解集。

5.5 逻辑逆运算在解逻辑方程及方程组的要点小结

在对逻辑方程及方程组进行化简的过程中，首选用逻辑函数的幂等律，归一律，吸收律进行化简。

其次可以依据约束条件：$1/C$，$C=1$，$0\text{-}B$，$B=0$，进行继续化简。

最后必须重视：$E=\Omega=\begin{cases}1\\0\end{cases}$，有的全解情况，（如果是中间过程，就要把 $E1=1$，$E2=0$，分别代进原式中，再进行计算，否则会减少它们的有效解集。

注：上述在解逻辑方程及方程组的各种运算方法同样可以用在逻辑函数式子的化简上，方法类似雷同（但没有方程两边同时对同一式子进行加、减、乘、除的运算），也没有对常数项进行移项处理这种方法。由于方法类似，在此略过。

5.6 逻辑函数逆运算的应用

5.6.1 逻辑函数逆运算在计算机中及开关电路中的应用

在开关电路中，已知电路的输出状态（结果），反推输入状态，这就要用到逻辑函数逆运算，这在计算机专业中是有很多的应用前景的。

5.6.2 逻辑函数逆运算在逻辑推理及命题函数中的应用

当一个逻辑命题已知其结果，欲求原因时，就要用到逻辑函数逆运算，特别是在警察破案的过程中就是这种情景。

6 结语

论文首先根据逻辑函数的运算规律，把布尔代数，命题逻辑，开关代数统一为逻辑函数。并引进逻辑函数的逆运算：主要是逻辑减及逻辑除；继而根据逻辑加与逻辑乘的真值表求得逻辑减及逻辑除的各种真值及计算规律。最后用逻辑函数的加、减、乘、除的方法去简化逻辑式子及求逻辑方程与逻辑方程组的各种解的集合；并且大致提及逻辑函数逆运算在开关电子计算机及警察破案过程的运用。

参考文献

[1] 曹迎槐.离散数学[M].北京:国防工业出版社,2015.

[2] 闫林.数理逻辑基础与粒计算[M].北京:科学出版社,2007.

[3] 刘叙华.离散数学[M].北京:中央电视大学出版社,1993.