教学方法创新与实践·第 02 卷·第 06 期·2019 年 10 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2354

Research on the Application of Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices

Rui Wang　Li Qu　Pan Jiang

Jilin Normal University, Changchun, Jilin, 137000, China

Abstract

Eigenvalues and Eigenvectors are one of the main problems in the study of linear algebra. They are closely related and are widely used in mathematics and real life, especially in the field of science and technology. The main content of this paper mainly expounds the application of eigenvalues and eigenvectors of matrix in ordinary differential equation, analytic hierarchy process and environmental protection.

Keywords

matrix; eigenvalue; eigenvector

矩阵的特征值与特征向量的应用研究

王蕊　曲莉　姜畔

吉林师范大学，中国·吉林 长春 137000

摘　要

特征值与特征向量是线性代数研究的主要问题之一，两者密切相关，在数学与实际生活中应用广泛，特别是对现在的科学技术领域，起着至关重要的作用。正文内容主要阐述了矩阵的特征值与特征向量在常微分方程、层次分析以及保护环境中的应用。

关键词

矩阵；特征值；特征向量

1 引言

伴随着科技的快速发展，社会发展的速度与日俱增，代数作为数学中的一门基础科目已经渗透于众多领域，它在其他领域的地位越来越重要。在代数问题的研究过程中，大量的问题转化为矩阵问题，并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究，甚至有些性质完全不同的、表面没有联系的问题，归结为矩阵问题以后却是相同的。这就使矩阵成为数学中的一个极其重要的且应用广泛的概念，因而也就使矩阵成为代数特别是线性代数的一个主要研究对象。

矩阵的概念产生于十九世纪中叶，是为了了解线性方程组的需要而产生的。“矩阵 Matrix”的术语是由西尔维斯特首次提出的，之后，由凯莱明确其概念，创立了矩阵理论，系统而全面地阐述了矩阵的理论体系，后来，由弗洛伯纽斯等人继续发展和完善矩阵理论体系，进而形成了现代矩阵理论。而中国早在公元前一世纪的《九章算术》中就已经开始使用类似矩阵的名词，遗憾的是那时矩阵只是用于解决一些实际问题，并没有系统地提出矩阵理论。矩阵理论中的特征值与特征向量问题是矩阵理论的重要组成部分之一，与此同时它又贯穿于常微分方程、高等代数等学科。矩阵的特征值与特征向量问题不仅可以解决数学中相关的计算问题，在物理、生物、计算机科学中也发挥着重要的作用。

2 特征值与特征向量在常微分方程中的应用

特征值与特征向量在数学中应用广泛，尤其是在常微分方程中对于常系数线性微分方程组的解法中起着十分重要的作用，对于齐次线性方程组的通解问题，就是求其基本解组，对于一般的方程组的基本解组暂时还没有一般方法，但是对于常系数线性齐次方程组

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{1.1}$$

其中 A 是 $n\times n$ 的实常数矩阵，通过线性代数中的若当标准型理论，可以使问题得以解决。

由线性代数中的知识可知，对于任意一个 $n\times n$ 的矩阵 A，总存在非奇异的 $n\times n$ 矩阵 T，使矩阵 $T^{-1}AT$ 为若当标准型。对方程组（1.1）引入非奇异线性变换

$$Y=TZ \tag{1.2}$$

其中 $T=(t_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n),\det T\neq 0$，将方程组（1.1）化为

$$\frac{dZ}{dx}=T^{-1}ATZ \tag{1.3}$$

矩阵 A 的特征方程与若当标准型 $T^{-1}ATZ$ 的形式

$$\det(A-\lambda E)=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=0$$

的根的情况有关。上述的方程称之为常系数其次方程组（1.1）的特征方程，它的根称之为矩阵 A 的特征根 [1]。

3 应用特征值特征向量确定权重大小的方法

设有 n 个物体 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 如若两两比较物体的质量，其比值可以构成 $n\times n$ 的矩阵

$$P=\begin{pmatrix} m_1/m_1 & m_1/m_2 & \cdots & m_1/m_n \\ m_2/m_1 & m_2/m_2 & \cdots & m_2/m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n/m_1 & m_n/m_2 & \cdots & m_n/m_n \end{pmatrix}=(p_j)_{n\times n}.$$

显然 P 有以下性质：

$$p_{ii}=1,p_{ij}=\frac{1}{p_{ji}},p_{ij}=\frac{p_{ik}}{p_{jk}}(i,j,k=1,2,\cdots,n).$$

此时称 P 是具有完全一致性 [4]。

现在用向量 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)^{\mathrm{T}}$ 右边乘以矩阵 p 得到

$$Pm=\begin{pmatrix} m_1/m_1 & m_1/m_2 & \cdots & m_1/m_n \\ m_2/m_1 & m_2/m_2 & \cdots & m_2/m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n/m_1 & m_n/m_2 & \cdots & m_n/m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} nm_1 \\ nm_2 \\ \vdots \\ nm_n \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}=nm,$$

即

$$(P-nE)m=0$$

根据矩阵理论可知：m 是 P 的特征向量，n 是 P 的特征值。

通过进一步的证明可以得到，n 为 P 的唯一非零特征值，也是 P 的最大特征值。m 是对应于最大特征值 n 的特征向量。

如若将 n 个物体 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，改为影响某项决策的 n 个因素，那么 $m_i(i=1,2,\cdots n)$ 为各个因素对于决策影响的重要程度，也就是权重，通过上述分析，就可以通过运用特征值特征向量相关知识计算出权重的大小，进一步计算出加权平均给出最佳的决策。

4 特征值与特征向量在保护环境中的应用

本章介绍了特征值与特征向量在保护环境中的应用，解决这类问题的关键是要学会把实际问题转化为数学语言，特别是矩阵语言，然后再利用特征值与特征向量来解决问题，利用列矩阵转换矩阵的乘法运算，实现由当前状态来预测下一阶段的不同状态，这是矩阵的一个重要应用，从这里我们可以进一步体会矩阵在社会经济领域里的价值 [2-3]。

例题: 发展和环境问题已经成为人们越来越关注的重点，为了定量分析工业发展与污染问题的关系，某地区有人提出了以下工业增长模型：x_0 是某地区某年的污染损失，y_0 该地区目前的工业发展水平，该年作为基年，令 k =0；若以五年作为一个周期，用 x_k,y_k 作为第 k 个期间的污染损失程度和工业发展水平，将此模型写作 $\begin{cases} x_k=\frac{8}{3}x_{k-1}-\frac{1}{3}y_{k-1} \\ y_k=-\frac{2}{3}x_{k-1}+\frac{7}{3}y_{k-1} \end{cases}$

现在已知基年的发展水平为 $a_0=\begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}$，试估计第四期该地区的污染程度和工业发展水平。

解：由题意可得

教学方法创新与实践・第 02 卷・第 06 期・2019 年 10 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2354

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\cdots)$$

即

$$a_k = Aa_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots)$$

其中

$$a_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{8}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

对于特征值 $\lambda_1 = 2,$ 解齐次线性方程组 $(A-2E)x = 0$，可得 A 对应于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

对于特征值 $\lambda_2 = 3$，解齐次线性方程组 $(A-3E)x = 0$，可得 A 对应于 $\lambda_2 = 3$ 的特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

易知

$$a_0 = 10\eta_1 + \eta_2$$

于是

$$a_k = A^k a_0 = 10A^k\eta_1 + A^k\eta_2 = 10\times 2^k\eta_1 + 3^k\eta_2 = \begin{pmatrix} 10\times 2^k + 3^k \\ 20\times 2^k - 3^k \end{pmatrix}$$

当 $k = 4$ 时，环境污染损失 $x_4 = 241$，工业产值为 $y_4 = 239$，损失已经超过了产值，经济将出现负增长。

5 结语

矩阵的特征值与特征向量的线性代数中十分重要的内容，在数学领域的其他科目中有着广泛的应用，在物理、生物等领域也占有重要地位。本文介绍了矩阵的特征值与特征向量在常微分方程中有关求解常系数其次方程组的解、在层次分析法确定权重中的应用以及其在保护环境中的应用。本文内容注重培养读者的抽象思维能力和分析、解决问题的能力，给出了矩阵的特征值与特征向量在各个领域应用的具体应用案例，展现了线性代数“应用广泛性”的这一科学特性，方便人们的学习和生活。

参考文献

[1] 东北师范大学微分方程教研室 . 常微分方程 [M] 第二版 . 北京 : 高等教育出版社 .2005.4:138~146.

[2] 王坤龙 . 线性代数及其应用 [M]. 北京 : 电子工业出版社 . 2014.10:96~99 110~117.

[3] 毛立新 , 咸美新 . 线性代数及其应用 [M]. 北京 : 高等教育出版社 .2015.8:134~139 161~165.

[4] 王萼芳 , 石生明 . 高等代数 [M] 第三版 . 北京 : 高等教育出版社 .2003.9:290~293.