教学方法创新与实践·第 02 卷·第 06 期·2019 年 10 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2355

Research on the Method of Solving Multiple Limit

Li Qu　Rui Wang　Pan Jiang

Jilin Normal University, Changchun, Jilin, 137000, China

Abstract

In this paper, nine methods are given to solve the multiple limit: four fundamental rules and continuity are used to solve the multiple limit, the definition of the multiple limit is used to solve the multiple limit, the contraction method and convergence are used to solve the multiple limit, the elementary transformation is used to solve the multiple limit, the variable substitution is used to solve the multiple limit, the product of infinitesimal and bounded quantity or infinitesimal is used to solve the multiple limit, and the equivalent substitution is used to solve the multiple limit, the parameter method is used to solve the multiple limit, and the generalization of the important limit is used to solve the multiple limit.

Keywords

multiple limit; scaling method; four fundamental rules

重极限的求解方法研究

曲莉　王蕊　姜畔

吉林师范大学，中国·吉林 长春 137000

摘　要

本文给出了求解重极限的九种方法：利用四则运算以及连续性求解重极限、利用重极限定义求解重极限、利用放缩法和迫敛性求解重极限、利用初等变换求解重极限、利用变量替换求解重极限、利用无穷小量与有界量的乘积还是无穷小量求解重极限、利用等价代换求解重极限、利用参数法求解重极限、利用重要极限的推广求解重极限。

关键词

重极限；放缩法；四则运算

1 引言

极限理论是贯穿于数学分析的始终，无论是数列极限还是函数极限的解题方法，还是正常积分与反常积分，都是紧密地与极限理论相关联，由极限的形式定义给出的。而这些内容，正是数学分析中的重中之重。要掌握好它的关键内容，必须从极限出发，深刻而准确地理解它们的概念，掌握它们的内涵。只有这样，学生才能正确的掌握这门知识，灵活的运用这门知识与技能。因此，极限理论是求解重极限的研究起源。

极限思想的萌芽可以追溯到古希腊时期和中国的战国时期，但是在真正意义上，极限的定义是出现于沃利斯的无穷算书中，并且在其自然哲学的数学原理里牛顿也明确使用了极限这个词并相应的做出了解释，直到 18 世纪下半叶人们才开始认识到极限，不断的研究与发展，柯西是最先给出了描述性的极限定义，之后威尔斯特拉斯给出了严格性的极限定义。

总而言之，极限理论是数学中极其重要的一个概念，它是第二次数学危机的产物，是几千年人类思想的结晶。

2 重极限的求解方法

2.1 二元函数的极限

定义 1[3] f 为定义在 $D \subset R^2$ 上的二元函数，P_0 为 D 的聚点，A 是一个确定的实数。若存在某正数 δ，使得当 $P \in U^0(P_0;\delta) \cap D$ 时，都有 $\left|f(P)-A\right| < \varepsilon$，则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时，以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{p \to p_0, p \in D} = A$。

当 P, P_0 分别用坐标 $(x,y),(x_0,y_0)$ 表示时，$\lim\limits_{p \to p_0} f(p) = A$ 也常写作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$。

2.2 二元函数极限求解方法

2.2.1 利用定义证明重极限

例 1：用极限定义证明[1]：$\lim\limits_{x\to 2, y\to 1}\left(3x^2+2y\right)=14$。

教学方法创新与实践·第 02 卷·第 06 期·2019 年 10 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2355

证：因为 $x \to 2, y \to 1,$ 不妨设 $|x-2|<1, |y-1|<1,$ 有

$$|x+2| = |x-2+4| \le |x-2|+4<5,$$

$$|3x^2+2y-14| \le 3|x-2||x+2|+2|y-1|<15|x-2|+2|y-1|<15(|x-2|+|y-1|),$$

$\forall \varepsilon>0,$ 当 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{30},1\right\},$ 当 $|x-2|<\delta, |y-1|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(2,1)$ 时，有 $|3x^2+2y-14|<\varepsilon$。

方法技巧：首先要适当地给变量一个范围，通常取 $\delta=1$，或者根据题目实际选择，如："不妨设变量范围为 $|x-2|<1, |y-1|<1$。其次，δ 的选取，即要兼顾开始时给的范围，也要使得结论可以成立，如："$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{30},1\right\}$"。

2.2.2 利用四则运算法则以及函数的连续性求解重极限

（1）二元函数的四则运算法则[2]：若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则函数 $f \pm g, f\cdot g$。

（2）二元函数的连续性[2]

定义 2 设函数 f 在点 P_0 的某个领域有定义，若 $\lim\limits_{p\to p_0} f(P)=f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 处连续。

例 2：求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)$。[1]

解：由于（对于 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi]$）

$0\le\left|xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\le 2r^2\ln r\to 0 \quad (r\to 0^+)$，所以，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)=0$。

2.2.3 利用适当放缩法并使用迫敛性求解重极限

放缩法[2]：是不等式的证明里的一种方法，所谓放缩法，要证明不等式 $A>B$ 成立，有时可以将它的一边放大或者缩小，寻找中间量。

迫敛性[2]：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A,$ 且在某 $U^0(x_0;\delta')$ 内有 $f(x)\le h(x)\le g(x),$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$。

例 3：求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$。

解：由于当 $x>0, y>0$ 时，$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2},$ 所以 $0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0, x\to+\infty$。

于是，$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$。

总结：放缩法不是很容易的能够让人接受，理解。但是这种方法对解题却有着很好的帮助。做题时要注意是放大还是缩小容易，总而言之就是审清题目，总结方法。

2.2.4 利用变量替换化简或化为已知极限求解重极限

对于含有三角函数或幂指函数的重极限，考虑它是否能够通过变形或者是变量代换化为一元函数中的基本极限[4]。

（1）将重极限化为另一个易于求解的重极限

例 4：求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}$。

解：当 $(x,y)\in U^0((0,2);\delta)$ 时，令 $t=xy$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{(t,y)\to(0,2)}\frac{\sin t}{t}\cdot y=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{y\to 2} y=2。$$

（2）利用变量代换将二元函数的极限化为一元函数的极限

例 5：求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$。

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$，令 $t=x^2+y^2$，故 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$。

（3）用极坐标变换法将二元函数的极限化为一元函数的极限

例 6：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{(xy-y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$。

解：用极坐标变换：$x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，等价于 $t\to 0^+$，

所以，$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{(xy-y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$。

2.2.5 利用初等变形求二元函数的极限

在初中、高中阶段，最后要求分母当中不含根号。因此分母有理化成为我们解题学习和使用过程中的一种重要方法[4]。

（1）用简化运算法求解二元函数的极限

例 7：求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$。

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2355

解：由于

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)-1}=\sqrt{1+x^2+y^2}+1$$

所以，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\right)=2。$$

（2）用取对数发求解二元函数的极限

例 8：求 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$。

解：

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}e^{\frac{1}{\sin xy}\ln(1+xy)}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}e^{\frac{xy}{\sin xy}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}},$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{xy}{\sin xy}=1,\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\ln e=1,$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=e$。

2.2.6 利用等价代换法求解重极限 [4]

利用无穷小量的性质做等价代换来求得结果。

例 9：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left[1+x\left(x^2+y^2\right)\right]}{x^2+y^2}$。

解：因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\ln\left(1+x\left(x^2+y^2\right)\right)$ 与 $x\left(x^2+y^2\right)$ 为等价无穷小量。

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\left[1+x\left(x^2+y^2\right)\right]}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}x=0。$$

2.2.7 利用参数法求解重极限

用极坐标变换法将重极限化为一元函数的极限，也是可以归纳到参数这一类 [5]。

例 10：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$。

解：设 $y=kx$，代入到原式即得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ $=\lim\limits_{k\to0}\frac{\left(1+k^2\right)x^2}{\left(1+k^4\right)x^4}=0$，与 k 值无关，有可能存在极限，下面证明重极限为 0。

因为 $\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}-0\right|=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2y^2}$，

取 $M\ge\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则当 $\forall\varepsilon>0$，$|x|>M,|y|>M$ 时，

$\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}-0\right|\le\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2y^2}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$。

2.2.8 利用无穷小量与有界量的乘积或者无穷小量求解重极限 [5]

例 11：

求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+\sin y\right)\sin\left(\frac{1}{x+y}\right)\arctan\left(\frac{1}{x+y}\right)$。

解：因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+\sin y\right)=0$，所以 $x^2+\sin y$ 为无穷小量，

又 $\left|\sin\left(\frac{1}{x+y}\right)\right|\le1,\left|\arctan\left(\frac{1}{x+y}\right)\right|<\frac{\pi}{2}$，即都为有界量。

所以，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+\sin y\right)\sin\left(\frac{1}{x+y}\right)\arctan\left(\frac{1}{x+y}\right)=0。$$

2.2.9 利用一元函数中重要极限的推广求解重极限 [5]

例 12：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}(1+x)^{\frac{1}{x^2+xy}}$。

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}$；所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}(1+x)^{\frac{1}{x^2+xy}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x+y}}=e^{\sqrt{2}}$。

3 结语

本文从重极限的定义出发，给出了重极限的求解方法，分别为利用重极限的定义，连续性，追敛性，放缩法，四则运算，变量替换，初等变形等进行求解，这些知识点也是帮助我们检验对以往知识点的考察，做题时灵活运用，并不是所有的方法都适合一种题型，应该找到一种适合它，简单且便捷的方式去求解，对理论相关的例题进行诠释，有助于对理论内容的理解。

教学方法创新与实践 · 第 02 卷 · 第 06 期 · 2019 年 10 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i6.2355

参考文献

[1] 杜其奎 , 陈金如 , 谢四清 , 陈晓立 . 数学分析精读讲义 [M]. 北京 : 科学出版社 .2012,6.536−546.

[2] 胡适耕 , 张显文 . 数学分析 : 原理与方法 [M]. 北京 : 科学出版社 .2008,5.71−143.

[3] 华东师范大学数学系 . 数学分析 [M]. 北京 : 高等教育出版社 .2016,6.100−107.

[4] 华东师范大学数学系编 . 数学分析 [M] 第二版 . 北京 : 高等教育出版社 .1991,10.121−130.

[5] 许洪范 . 数学分析下册 [M]. 延边 : 延边大学出版社发 .2000,1.1−11.