

Herbert matrix operator on H^1 pace

Congli Yang Jingming Chen

Guizhou Education University, School of Mathematical Sciences, Guiyang, Guizhou, 550025, China

Abstract

By investigating the boundedness of the Hilbert matrix operator on Hardy spaces, particularly the H^1 space, this study aims to address gaps in the existing theoretical framework in this field. By introducing composition operators and integral estimation methods, the boundedness of the Hilbert matrix on H^p spaces ($1 < p < \infty$) and the validity of its integral representation are established. The analysis reveals that the composition operators constructed via linear fractional transformations preserve the boundedness of the norm in Hardy spaces, thereby extending the applicability of integral representations to broader function spaces. The results not only refine the theoretical framework of the Hilbert operator on H^p spaces but also provide new analytical perspectives on the properties of H^1 spaces, laying a foundation for subsequent research.

Keywords

Herbert matrix; H^p space; bounded operator; integral equation; composition operator

H^1 空间上的希尔伯特矩阵算子

杨丛丽¹ 陈镜名^{*}

贵州师范大学数学科学学院, 中国 · 贵州 贵阳 550025

摘 要

通过研究希尔伯特矩阵算子在哈代空间（特别是 H^1 空间）上的有界性问题，旨在弥补该领域相关理论的不足。通过引入复合算子与积分估计方法，证明了希尔伯特矩阵在 H^p 空间（ $1 < p < \infty$ ）上的有界性及其积分表达形式的有效性。分析表明，通过分式线性变换构造的复合算子能够保持Hardy空间的范数有界性，推广了积分表达式在 H^p 空间上的适用范围。结果不仅完善了希尔伯特算子在 H^p 空间的理论框架，还为 H^1 空间的相关性质提供了新的分析视角，为后续研究奠定了基础。

关键词

希尔伯特矩阵； H^p 空间；有界算子；积分表达式；复合算子

1 引言

希尔伯特不等式：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right|^p \right)^{1/p} \leq \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p},$$

对序列空间 $a = \{a_n\}$ 中 l^p 对 $1 < p < \infty$ 成立，并且常数 $\pi/\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)$ 是最佳的推测^[1]，因此希尔伯特矩阵

$$H = \left(\frac{1}{i+j+1} \right) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

通过对序列的乘法作用，在范数为 $\|H\|_{p \rightarrow p} = \pi/\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)$, $1 < p < \infty$ 的 l^p 空间上导出有界线性算子

$$Ha = b, \quad b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1},$$

若定义在单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ 上的函数满足^[4]

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

则 $f \in H^p$ 。

若函数 $f(z)$ 的 Taylor 展开式为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ，则算子 $\mathcal{H}$ 作用于 f 定义为：

$$\mathcal{H}(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right) z^n$$

可以得到有界性、范数范围预估^[3]等一系列成果。然而对于 H^1 空间，很多相关的理论却没有得到详尽的说明，本文旨在完善一部分相关的内容，借此抛砖引玉。

2 引理及其证明

引理 1；如果 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 是一个解析自映射，且满足 $\|\varphi\|_{H^\infty} \leq 1$ ，若 f ，则 $f \circ \varphi \in H^p$ ：

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$$

且复合算子在 H^p 上是有界的。

【作者简介】杨丛丽，女，侗族，中国贵州黎平人，博士，副教授，从事函数论研究。

【通讯作者】陈镜名，男，侗族，中国河南开封人，硕士，从事函数论研究。

证明: 由于 φ 是解析的, 并且, 则 $\|\varphi\|_{H^\infty} \leq 1$ 对 $z \in \mathbb{D}$ 成立.

根据 H^p 范数的定义, 有:

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p} = \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi(re^{i\theta}))|^p d\theta \right)^{1/p}$$

由于 $|\varphi(re^{i\theta})| \leq 1$, 可以利用 f 的 H^p 范数^[5]来估计 $|f(\varphi(re^{i\theta}))|$:

$$|f(\varphi(re^{i\theta}))| \leq \|f\|_{H^p} \quad (\text{因为 } |z| \leq 1 \text{ 时, } |f(z)| \leq \|f\|_{H^p})$$

不等式代入 $\|f \circ \varphi\|_{H^p}$ 的表达式中, 可以得到:

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$$

这表明复合算子 $f \circ \varphi$ 在 H^p 上是有界的.

引理 2:^[7] 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个测度空间, 其中 μ, ν 均为 Lebesgue 测度, $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负可测函数, 且 $p \geq 1$, 则有

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

证明: 设 $f(x, y) \geq 0$ 是可测函数, 且 $p > 1$. 定义

$$F(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

对 $F(x)^p$ 进行展开:

$$F(x)^p = \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p$$

若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$F(x)^p \leq \left(\int_Y f(x, y)^p d\nu(y) \right) \left(\int_Y 1^q d\nu(y) \right)^{p/q}$$

由于 $\int_Y 1^q d\nu(y) = \nu(Y)^{1/q}$, 因此

$$F(x)^p \leq \nu(Y)^{p/q} \int_Y f(x, y)^p d\nu(y)$$

对 $F(x)^p$ 在 X 上积分:

$$\int_X F(x)^p d\mu(x) \leq \nu(Y)^{p/q} \int_X \int_Y f(x, y)^p d\nu(y) d\mu(x)$$

由 Fubini 定理^[5],

$$\int_X F(x)^p d\mu(x) \leq \nu(Y)^{p/q} \int_Y \int_X f(x, y)^p d\mu(x) d\nu(y)$$

对不等式两边取 p -次方根:

$$\left(\int_X F(x)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \nu(Y)^{1/q} \left(\int_Y \int_X f(x, y)^p d\mu(x) d\nu(y) \right)^{1/p}$$

由于 $\nu(Y)^{1/q}$ 是常数

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y)$$

引理 3: 设 $F(t, z)$ 是一个关于 t 可测且范数可积的函数, 其中 $t \in [0, 1]$, $F(t, z) \in H^p$. 则对于 $p \geq 1$, 有

$$\left\| \int_0^1 F(t, z) dt \right\|_{H^p} \leq \int_0^1 \|F(t, z)\|_{H^p} dt$$

证明: 设 $F(t, z)$ 是关于 t 可测且范数可积的函数, 定义

$$G(z) = \int_0^1 F(t, z) dt$$

则,

$$\|G(z)\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |G(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p}$$

代入得

$$\|G(z)\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_0^{2\pi} \left| \int_0^1 F(t, re^{i\theta}) dt \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p}$$

由引理 2 得

$$\left(\int_0^{2\pi} \left| \int_0^1 F(t, re^{i\theta}) dt \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} \leq \int_0^{2\pi} |F(t, re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} dt$$

对上式取上确界, 得到

$$\|G(z)\|_{H^p} \leq \int_0^1 \|F(t, z)\|_{H^p} dt$$

即

$$\left\| \int_0^1 F(t, z) dt \right\|_{H^p} \leq \int_0^1 \|F(t, z)\|_{H^p} dt$$

引理 4:^[6] 设 p 和 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 其中 $p > 1$ 且 $q > 1$. 对于可积函数 f 和 g , 有

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

证明: 设 $A = \|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}$ 和 $B = \|g\|_q = \left(\int |g|^q \right)^{1/q}$. 若 $A=0$ 或 $B=0$, 不等式成立. 否则, 定义归一化函数:

$$\tilde{f}(x) = \frac{|f(x)|}{A}, \quad \tilde{g}(x) = \frac{|g(x)|}{B}$$

对于任意 x , 有:

$$\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \leq \frac{\tilde{f}(x)^p}{p} + \frac{\tilde{g}(x)^q}{q}$$

则:

$$\int \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) dx \leq \int \left(\frac{\tilde{f}(x)^p}{p} + \frac{\tilde{g}(x)^q}{q} \right) dx = \frac{1}{p} \int \tilde{f}(x)^p dx + \frac{1}{q} \int \tilde{g}(x)^q dx$$

由于 $\int \tilde{f}(x)^p dx = 1$ 和 $\int \tilde{g}(x)^q dx = 1$, 所以:

$$\int \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

因此:

$$\int \frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B} dx \leq 1 \Rightarrow \int |f(x)g(x)| dx \leq AB = \|f\|_p \|g\|_q$$

3 定理证明

定理 1: 当 $f \in H^1$ 时, $\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1}{1-tz} dt$ 与 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right) z^n$ 等价

证明: 对于 $|tz| < 1$ 即 $|z| < 1$ 且 $t \in [0, 1]$, 积分核可

展开为: $\frac{1}{1-tz} = \sum_{m=0}^{\infty} (tz)^m$

则:

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 f(t) \sum_{m=0}^{\infty} (tz)^m dt$$

假设 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且级数 $\sum_{m=0}^{\infty} (tz)^m$ 在 $t \in [0,1]$ 和 $|z| < 1$ 时一致收敛, 则:

$$\mathcal{H}(f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^1 f(t) t^m dt \right) z^m$$

因为 $f \in H^1$, 有:

$$\int_0^1 f(t) t^m dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^1 t^{k+m} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+m+1}$$

因此, $\int_0^1 f(t) t^m dt$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1}$ (当 $n=m$ 时) 一致。

令 $t = \frac{t}{(t-1)z+1}$, 则 (1) 式可化为

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{1}{(t-1)z+1} f\left(\frac{t}{(t-1)z+1}\right) dt. \quad (1)$$

定理 2: 若 $f \in H^p$, 式 (1) 同样成立

证明: 原积分路径 $\zeta_z(t)$ 仍适用于 H^p , 因路径始终位于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内。变量替换后, 式 (2) 为:

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{1}{(t-1)z+1} f\left(\frac{t}{(t-1)z+1}\right) dt$$

$\varphi_t(z) = \frac{t}{(t-1)z+1}$ 的分母 $(t-1)z+1$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内不

为零 (因为 $|z| < 1$ 且 $t \in [0,1]$), 因此 $\varphi_t(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内是解析的。

对于 $|z| < 1$, 可以证明 $|\varphi_t(z)| < 1$ 。因为 $\varphi_t(z)$ 将 $\mathbb{D}$ 映射到 $\mathbb{D}$, 所以 $|\varphi_t(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 成立。

由引理 1 可知, 如果 $\varphi_t(z)$ 是解析自映射且满足 $\|\varphi_t\|_{H^\infty} \leq 1$, 那么对于 $f \in H^p$, 复合函数 $f \circ \varphi_t$ 也属于 H^p , 并且满足: $\|f \circ \varphi_t\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$ 。

所以 $C_{\varphi_t}(f) = f \circ \varphi_t$ 在 H^p 空间上是有界的。

当 $t \in [0,1]$ 且 $z \in \mathbb{D}$ 时,

$$|(t-1)z+1| \geq 1 - |(t-1)| \cdot |z| \geq 1 - (1-t) = t \geq 0$$

在 $t > 0$ 时, 分母 $\mathbb{D}$ 在内无零点, $F(t, z)$ 保持解析性; 当 $t=0$ 时, 除 $z=1$ 外解析, 而 $z=1$ 在 Hardy 空间中可通过边值处理。

由引理 3, 对于 Banach 空间中的函数 $F(t, z)$, 若其关于 t 可测且范数可积, 则:

$$\left\| \int_0^1 F(t, z) dt \right\|_{H^p} \leq \int_0^1 \|F(t, z)\|_{H^p} dt$$

$F(t, z) = \frac{1}{(t-1)z+1} f\left(\frac{t}{(t-1)z+1}\right)$, 代入不等式有:

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{H^p} \leq \int_0^1 \left\| \frac{1}{(t-1)z+1} f\left(\frac{t}{(t-1)z+1}\right) \right\|_{H^p} dt$$

定义一个算子 $\psi(f)$:

$$\psi(f)(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt$$

由引理 3 有

$$\|\psi(f)\|_{H^p} \leq \int_0^1 \left\| \frac{f(t)}{1-tz} \right\|_{H^p} dt$$

由引理 4 有:

$$\left\| \frac{f(t)}{1-tz} \right\|_{H^p} \leq \|f(t)\|_{H^p} \left\| \frac{1}{1-tz} \right\|_{H^q}$$

对于 $|t| < 1$ 和 $|z| < 1$, 有:

$$\left\| \frac{1}{1-tz} \right\|_{H^q} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1-tre^{i\theta}z} \right|^q d\theta \right)^{1/q}$$

由于 $|1-tre^{i\theta}z| \geq 1-|z|$, 有:

$$\left\| \frac{1}{1-tz} \right\|_{H^q} \leq \left(\frac{1}{(1-|z|)^q} \right)^{1/q} = \frac{1}{(1-|z|)^{1/q}}$$

因此

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{H^p} \leq \int_0^1 \|f(t)\|_{H^p} \frac{1}{(1-t)^{1/q}} dt$$

当 f 在 H^p , $\|f(t)\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$, 则:

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p} \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/q}} dt$$

同时

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/q}} dt = \left[\frac{(1-t)^{1-1/q}}{1-1/q} \right]_0^1 = \frac{1}{1-1/q} = \frac{q}{q-1}$$

所以

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{H^p} \leq C \|f\|_{H^p} \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/q}} dt$$

其中 $C = \frac{q}{q-1}$

综上, $\mathcal{H}$ 在 H^p ($1 < p < \infty$) 上是有界算子, 式 (2) 的推广形式为:

$$\mathcal{H}(f)(z) = \int_0^1 \frac{1}{(t-1)z+1} f\left(\frac{t}{(t-1)z+1}\right) dt \quad (f \in H^p)$$

4 结论

本研究成果填补了希尔伯特算子在 H^1 空间理论研究的空白, 完善了 H^p 空间框架下的算子有界性理论, 为复分析中线性算子的范数估计提供了新方法。未来可进一步探索希尔伯特算子在或情形下的有界性条件, 尤其是 H^1 空间中的精细估计问题。

参考文献

- [1] Diamantopoulos E. Hilbert matrix on Bergman spaces. [J]. Illinois Journal of Mathematics, 2004, 48(3): 1067-1078
- [2] 徐芸. 一类解析函数空间上的微分 Hilbert 算子 [D]. 浙江科技学院, 2023. DOI:10.27840/d.cnki.gzjkj.2023.000178.
- [3] Duren P L. Theory of Hp Spaces [M]. New York: Academic Press, 1970.