DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v4i16.8586

Introducing Stochastic Inventory Model into Probability Class

Qiuling Xie

School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai, 201620, China

Abstract

In the past, probability and statistics classes focused on explaining formulas, theorems and abstract exercises, which is not conducive to students' mastery and application of knowledge points. Probability and statistics course itself is a very useful mathematical tool, which is widely used in social life and business administration. It is necessary to introduce it to students in combination with the actual background in classroom teaching to deepen their understanding. In order to inspire students' interest in mathematics and increase their ability to apply mathematical knowledge, taking a simple inventory model as an example, students can realize the importance and universality of mathematical tools and strengthen their understanding and interest in the knowledge related to probability distribution and stochastic process.

Keywords

probability and statistics; stochastic distribution; inventory model; case teaching

在概率课堂中引入随机库存模型

谢秋玲

上海工程技术大学数理与统计学院，中国·上海 201620

摘　要

以往概率统计课堂重在讲解公式、定理和抽象的习题，不利于学生融会贯通，掌握知识点的应用。概率统计课程本身是一个非常有用的数学工具，在社会生活和工商管理中都有相当广泛的应用，有必要在课堂教学中结合实际背景介绍给学生，加深他们的认识。为了启发学生对数学的兴趣，增加对数学知识应用的能力，以简单的库存模型为例引入，可以让学生体会到数学工具的重要性和广泛性，加强对概率分布与随机过程相关知识的理解和兴趣。

关键词

概率统计；随机分布；库存模型；案例教学

1 引言

在社会生产和商品交换中，普遍存在“存贮”问题。工厂要定期订购各种原材料，存放在仓库里供生产之用；商店为了满足顾客的需要，必须有适当数量的库存货物来支持经营；医院血库需要一定数量的贮血以满足手术的需要等。不论是原材料、商品还是血浆的储存，都有一个储存多少的问题。原材料、商品存的太多，一则存贮费用较高，二则某些原料和商品有一定的保质期。反之如果存的太少则无法满足需求，因此，寻求合理的库存是现代企业进行科学管理和合理控制的一个重要课题，关键在于寻求一种最佳的存贮策略，使得总费用达到最小。

2 随机性库存模型简介

随机性库存模型的主要特点在于需求是随机的，但这种随机性通过分析往往呈现出某种统计规律性，即其概率分布是已知的。在随机性库存模型问题上的基本决策判别标准是使期望成本最小化，或等价于期望利润的最大化。

下面是关于在生产任务不固定的情况下，应该采购多少原料或外协作零部件的一类问题。已知：

①需求是随机的，其概率密度函数为 $f(x)$，需求率为 d，这里理解为一个随机变量的期望值，d 的单位是每单位时间需求的件数，这里以一年为单位时间。

②订货采购的提前时间记为 L，在提前期 L 中，需求量的概率分布密度函数由 $f(x)$ 给出，其均值用 μ 表示。

③系统可能缺货，也允许缺货，设 c_3 为库存枯竭时的缺货惩罚费用。

④为了尽可能地减少缺货情况的发生，当库存水平降低到某一称作“再订货点”（以 r 表示）的数值时，就开始补充订货，r 有时也称作“存贮水平警报点”。r 的取值是一个有待决定的数量。就是说，当库存水平到达 r 以后便进行订货，经过固定的时间 L 的延迟，才能得到补充，每次补充为批量 Q。

【作者简介】谢秋玲（1978–），女，中国四川彭州人，讲师，从事高等数学教育研究。

⑤每次进行订货所需的订购费为c_1，每件货物单位时间的存贮费为c_2。现要求确定最佳订购批量Q^*、再订货点r^*，使得年度总费用最少（见图 1）。

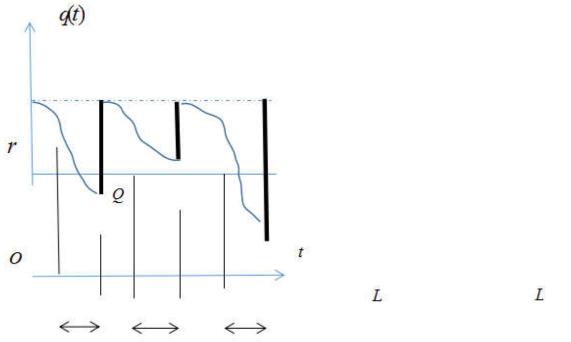

图 1 批量再订货库存量变化图

该模型期望年度总费用包括订购费用、库存耗尽费用和存贮费用三部分。其中订购费用为$\dfrac{c_1 d}{Q}$，这里$\dfrac{d}{Q}$是每年订货的大约次数，设$B(r)$为一个存贮周期内的期望缺货量，因此，缺货费L为$\dfrac{c_1 B(r) d}{Q}$。

设在提前订货时间内（即L时间）需求量为x，S是每个周期的缺货数量，则：

$$S(x)=\begin{cases}0 & x\le r,\\ x-r & x>r.\end{cases}$$

因此，每个周期内的期望缺货量为

$$\begin{aligned}B(r)&=\int_0^{+\infty}S(x)f(x)dx=\int_0^r 0.f(x)dx\\&+\int_r^{+\infty}(x-r)f(x)dx=\int_r^{+\infty}(x-r)f(x)dx\end{aligned}\qquad(1)$$

所以全年的平均存贮费用为c_2×（全年平均存贮量）。那么如何求出年度存贮量（用Q_φ表示）呢？我们引入一个："典型周期"概念。所谓典型周期是指其特性与一切周期的期望特性相同的周期，也就是说周期开始时所处的库存水平，等于一切周期开始时所处的期望水平，其所经历的期间等于期望期间。这样，全年的平均存贮量等于一个典型周期的平均库存。

在这个假想的典型周期内，周期以订货到达为始点，而当刚开始订这批货时，库存水平是r，在整个提前期L中，需求以随机的方式继续到来，其期望需求量是μ。因此在订货到达前的一刹那，期望库存水平是$(r-\mu)$；当订货到达后的时刻，即典型周期一开始的期望库存水平将是$(Q+r-\mu)$，接着需求过程把库存用完，于是进行另一次的补充订货，最后这周期以$(r-\mu)$的期望水平结束，这样一个典型循环周期内的期望库存水平是在$(Q+r-\mu)$与$(r-\mu)$之间（见图 2）。

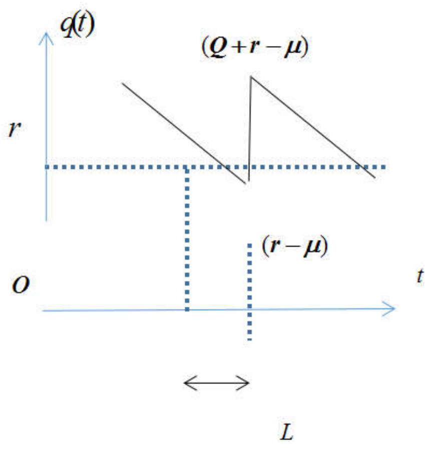

图 2 典型周期

因此，全年平均存贮量：

$$Q_\varphi=\frac{Q+(r-\mu)+r-\mu}{2}=\frac{Q}{2}+(r-\mu)$$

故得年度期望存贮费用为：

$$c_2 Q_\varphi=c_2\left(\frac{Q}{2}+r-\mu\right)\qquad(2)$$

于是，全年总费用为：

$$c(Q,r)=c_1\frac{d}{Q}+c_3\frac{d}{Q}B(r)+c_2\left(\frac{Q}{2}+r-\mu\right)$$

根据微分法，令$\dfrac{\partial c}{\partial Q}=0$和$\dfrac{\partial c}{\partial r}=0$，则由第一个方程得：

$$Q^*=\sqrt{\frac{2d}{c_2}[c_1+c_3 B(r)]}\qquad(3)$$

由$\dfrac{\partial c}{\partial r}=c_2+\dfrac{c_3 d}{Q}\cdot\dfrac{dB(r)}{dr}$，其中$B(r)$由（1）式决定，得到：

$$\frac{dB(r)}{dr}=-\int_r^{+\infty}f(x)dx$$

由：

$$c_2+\frac{c_3 d}{Q}\left[-\int_r^{+\infty}f(x)dx\right]=0$$

即有：

$$\int_{r^*}^{+\infty}f(x)dx=\frac{c_2 Q^*}{c_3 d}\qquad(4)$$

此式表明：再订货点应该这样选取，即在L期间内，需求大于r的概率等于$\dfrac{c_2 Q^*}{c_3 d}$。式中缺货惩罚费用的增加，意味着上述概率的下降，也就是说存贮警报点r上升（亦即库

存贮备增加以求避免库存枯竭现象的出现）。

对于（3）式和（4）式显然不可能有关于 Q^* 和 r^* 的一个显式解。下面举出一种“迭代法”来解上述方程，只要解存在的话，则下述迭代法必收敛，其迭代步骤如下：

①首先设 $B(r)=0$，则由（3）式得：

$$Q_1=\sqrt{\frac{2dc_1}{c_2}}$$

②其次用（4）式来计算对应于 Q_1 的 r_1 值；

③应用 r_1，求得：

$$B(r_1)=\int_{r_1}^{+\infty}(x-r_1)f(x)dx$$

④利用 $B(r_1)$，按步骤（1）求解 Q_2；

⑤利用 Q_2，按步骤（2）求解 r_2；

⑥如此继续迭代下去，直到 Q_i 和 r_i 的值不再变化为止。最后所得数值便是最优订货批量和最佳再订货点。

上述迭代过程一定收敛，这是因为总年度期望费用函数为 $c(Q,1)$ 是一个凸函数（证明从略）。凸函数必存在一个极小值点，并且是最小值点。

3 结语

随机性库存模型有考虑单阶段需求的，也有考虑多阶段需求的，有时还要应用规划方法等各种最优化方法，综合多种办法求得最优解解决实际库存问题。我们通过这个模型的介绍学习，生动展示了高等数学与概率论知识的结合与在工商经济管理生活中的实际应用。不仅激发了学习积极性，而且为后继各专业课的引入打下了良好的基础。既拓展了学生把理论知识和实际相结合的思维能力，又开拓了知识面的融会贯通的效果。

参考文献

[1] 廖芹，郝志峰，陈志宏．数据挖掘与数学建模 [M]. 北京：国防工业出版社，2010.

[2] 李大潜．中国大学生数学建模竞赛 [M]. 北京：高等教育出版社，1998.

[3] 张滨燕，李大卫．高职院校高等数学课程教学的现状及改革对策 [J]. 辽宁教育研究，2005(9):75-76.

[4] 尚春虹．数学实验教学的探索与实践 [J]. 数学教育学报，2002, 11(3):66-68.

[5] 何文阁．在高职院校开展数学建模活动的意义与实践 [J]. 中国职业技术教育，2005(25):40-42.

（上接第 142 页）

解析：电压表与灯泡 L_2 并联，即灯泡 L_2 在电压表两接线柱之内，L_1 在电压表两接线柱之外，当电压表示数变为零时，电路故障为灯泡 L_2 短路（可归纳为内短 V 为 0）或灯泡 L_1 断路（可归纳为外断 V 为 0），即内短外断 V(电压表示数) 为 0，故选项 D 正确。

社会在飞速发展，老师的教学理念与方法也应该与时俱进，而不是以不变应万变地机械地教学，教育部门的政策，无非就是希望老师不断创新、提升教学效率，培养出更多的能够真正学以致用、具有创新能力的人才，而不是生产大量的做题机器。

4 结语

要让孩子真正站在巨人的肩膀上，看得远、走得也更远，而不是让孩子把所有的巨人都扛在肩上负重前行。

给学生“减负”，让学生更高效地学习，是大势所趋，势在必行。

教师，责无旁贷地要成为“给学生减负”的急先锋，教师只有与时俱进，“创新”出更高效的教学方法，才能培养出越来越多的真正有用的人才。

参考文献

[1] 张学良．“减负令”该如何落地 [N]. 江苏教育报，2018-05-04(3).