 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v4i18.8901

Analysis of the Teaching Design of Micro-class Items of Linear Algebraic Reverse Matrices

Jia Duo Xianghua Zhang

School of Science, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin, Heilongjiang, 150022, China

Abstract

Micro classes are the main carrier, which is the aid of traditional classroom teaching. A good micro-class resource has a vital role in flipping the smooth development and implementation of the classroom. It also directly determines the effect of classroom teaching, and teaching the design is the soul of the micro classes, the paper as an example with the definition of linear algebraic inverse matrices and the presence of the forensic, through the specific design ideas and teaching processes, analyzes the characteristics of micro-class design, and thereby realizing high quality teaching.

Keywords

linear algebra; micro-class; inversion matrix; teaching design

浅析线性代数逆矩阵的微课教学设计

多佳 张向华

黑龙江科技大学理学院，中国·黑龙江 哈尔滨 150022

摘 要

微课以视频为主要载体，是传统课堂教学的辅助，一个好的微课资源对于翻转课堂的顺利开展和实施有着至关重要的作用，它也直接决定着课堂教学的效果，而教学设计是微课的灵魂，论文以线性代数逆矩阵的定义及存在定理的教学为例，通过具体设计思路和教学过程的阐述，分析微课设计的特点，进而实现高质量的教学。

关键词

线性代数；微课；逆矩阵；教学设计

1 引言

线性代数课程是高等学校非数学专业的一门重要基础课程，为其他许多学科提供所需要的基本计算方法和解题工具。线性代数课程具有内容抽象和逻辑性强的特点，传统教师授课方式基本都采取“板书 +PPT+ 讲授”的教学模式，加之很多高校对线性代数课程安排的课时相对都比较少，导致教师讲得多而学生做得少，学生的思维不能及时跟上，造成一些重点与难点内容不能完全理解和掌握，久而久之学生逐渐失去了对线性代数的学习兴趣。因此，如何更好地提高学生学习线性代数的效率、增加他们对线性代数的学习兴趣，已成为目前线性代数教学研究和改革中的一个重要的任务。近年热门的微课设计理念为线性代数教学开启了一扇大门，特别是 2020 年春季教学受新冠肺炎疫情的影响，“停课不停学”使得钉钉直播、MOOC 课堂，微课等多种线上学习方式得到了很大的推进，基于翻转课堂教学模式的微课教学越来越受重视。

微课（Micro lecture），又名微课程，是相对常规课来说的一种微小的课程，用以讲授单一知识点或突破某个教学问题，它通常由简短的微课视频及配套资源所组成，教学视频是微课的核心组成内容，其主要有教学时间短、教学内容精、教学视频易传播等特点。

2 线性代数逆矩阵教学的微课设计

2.1 设计思路

逆矩阵是矩阵运算的一个重要的内容，同时它在其他学科领域占有重要的地位，如在军事密码破译和规划问题中等。整个教学设计思路可归纳为：抛出问题，引入新课—讲解定义、定理，掌握运算—结合实际，解决问题—提出问题，引发思考。

【基金项目】2019 年度高等教育教学改革研究项目《应用型本科院校数学教学采用 SPOC 翻转课堂教学模式的研究与实践》（项目编号：SJGY20190596）。

【作者简介】多佳（1981–），中国黑龙江齐齐哈尔人，硕士，讲师，从事大学基础数学的教学与研究。

2.2 教学过程

2.2.1 引入新课

提出问题：介绍信息加密的方法，数学密码是如何形成的，并且对于数学密码应如何破解？即矩阵方程 $AX=B$，其中 B 为接收矩阵；A 为加密矩阵；X 为明码矩阵，在矩阵 A、B 为已知的条件下如何求出明码 X 呢？引导学生思考，利用现有的知识能否解决此问题呢？教学意图就是激发学生的学习兴趣，点出本次课的主题。利用类比式教学，考虑实数运算 $ax=b$，当 $a\neq 0$ 时，有 $a^{-1}ax=a^{-1}b$，$x=a^{-1}b$，类似求解矩阵方程 $AX=B$，是否也有 $X=A^{-1}B$，引入逆矩阵的概念。

注：在微课设计中，尽量从学生感兴趣的实际问题引入新的知识点。这里设计 PPT 时可以插入密码学相关图片和短视频，从视觉和听觉上吸引学生注意力，让学生带着问题有继续听下去的兴趣，而这一点需要教师精心搜集资料，寻找与授课内容相一致的实际问题。教师从中贡献智慧，推动了教师的教学研究。

2.2.2 讲授新课

第一，给出逆矩阵的定义。

在数的运算中，当 $a\neq 0$ 时，有 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$，这里 a^{-1} 称为 a 的逆，而在矩阵的乘法运算中，单位矩阵 E 所起的作用与数与数之间的乘法运算中数字 1 所起的作用类似。于是引发学生思考，对于给定的矩阵 A，是否也存在一个矩阵 A^{-1}，使得 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$？此时给出逆矩阵的一般定义。

定义：对于 n 阶矩阵 A，如果有一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称矩阵 A 是可逆的，并把矩阵 B 称为是 A 的逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$。

①任意的矩阵都存在逆矩阵吗？

分析：$A_{m\times n}B_{n\times s}=B_{n\times s}A_{m\times n}\to m\times s=n\times n\to m=s=n$，强调只有 n 阶方阵，可以讨论逆矩阵，让学生理解逆矩阵定义中条件限定 n 阶矩阵的原因。

②逆矩阵存在是唯一的吗？

分析：若设 B 和 C 是 A 的可逆矩阵，则有 $AB=BA=E$，$AC=CA=E$，可得 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$，证明逆矩阵如果存在必定是唯一的。通过证明让学生加深对逆矩阵定义的理解。

③在什么条件下，方阵 A 是可逆的？如果 A 可逆，怎样求 A^{-1}？

分析：这是核心问题，顺应着学生的思维，自然会提出这样的问题，让学生愿意思考，主动探索。为此以最简单的二阶方阵为例，探讨一下逆矩阵的求解过程。

例：求二阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$ 的逆矩阵（利用待定系数法求解）。

解：用定义求逆阵，设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，因 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么 x_1，x_2, x_3, x_4 满足方程组：

$$\begin{cases} ax_1+bx_3=1 \\ ax_2+bx_4=0 \\ cx_1+dx_3=0 \\ cx_2+dx_4=1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1a+x_2c=1 \\ x_1b+x_2d=0 \\ x_3a+x_4c=0 \\ x_3b+x_4d=1 \end{cases}$$

求解方程组得 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，进一步引导学生观察二阶方阵四个元素的特点，是如何组成的，计算 $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{11}=d$，$A_{12}=-c$，$A_{21}=-b$，$A_{22}=a$，最终推出逆矩阵的一般表达形式：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

注：在微课设计中要适当设置问题，循序渐进层层迭代，摈弃“定义—定理、公式—证明—例题”的死板教学形式，最好让学生顺着问题自己分析总结，使其透过现象抓住本质。这里推出逆矩阵的表达式后教师要放慢语速，给学生思考总结的时间，引导学生分析，逆矩阵与行列式 |A| 有关，还与各个元素的代数余子式行标列标互换构成的矩阵有关，顺理成章的需要引进新的概念来表示这个由代数余子式构成的矩阵，这样就可以引出伴随矩阵的定义。

第二，给出伴随矩阵的定义。

定义：行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 Aij 所构成的如下矩阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵。

利用上面待定系数法求解二阶方阵逆矩阵的例题，给出伴随矩阵 A^* 的定义，进一步利用按行按列展开公式可以推出伴随矩阵的一个重要性质，即 $AA^*=A^*A=|A|E$，然后对该结论进行证明，进而解决矩阵可逆的充要条件。伴随矩阵这个新引入的概念比较抽象，也是学生理解的难点，面对不断新出现的数学符号，从最简单的二阶方阵入手，可以加深学生对概念和性质的理解。

第三，矩阵可逆的充要条件。

由伴随矩阵的性质 $AA^*=A^*A=|A|E$ 及逆矩阵的定义 $AB=BA=E$ 可以推出，方阵 A 可逆的充要条件为 $|A|\neq 0$ 且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$。讲到这里时，需要做一个简要的总结，帮学生回忆整理新学的知识点，强调一下本节的重、难点。除了待定

系数法又推出了利用伴随矩阵求解逆矩阵的方法，让学生清楚求解逆矩阵的方法不唯一，后续还会继续学习不同的求解及判定可逆的方法。通过教师的引导，将整个设计紧扣在一个循序渐进的系统内，由浅入深的层层铺垫，学生从认知上肯定定理结论，也使学生提升了学习的成就感。

2.3 结合实际，解决问题

最后扣题，利用逆矩阵解决密码破译问题，给出加密矩阵 A，接收矩阵 B，然后利用伴随矩阵法求解逆矩阵来进行密码破译，进而求出明码矩阵 $X = A^{-1}B$。可以让学生体会到数学源于实践，又应用于实践的魅力。这里我们引导学生走过了这样一个疑问、分析、猜想探索的过程，他们的逻辑思维、归纳总结和解决问题的能力才能得到提升。

2.4 提出问题，引发思考

在视频的最后提出本节的思考问题：那么所求出的明码 X 是唯一的吗？当加密矩阵 A 不可逆时，是否能求解出明码呢？对于高阶方阵而言，利用伴随矩阵求解逆矩阵计算量大比较繁琐，那么有没有更好的办法来求高阶方阵的逆矩阵呢？要求学生课后查阅资料，了解可逆矩阵在其他方面的一些应用，逐渐培养学生勤思考、自主学习、自己处理问题的习惯。

3 结语

在整个教学过程中，抓住重点，突破难点，揭示概念本质，利用逆矩阵概念的形成、存在定理的总结和求解方法的给出，培养学生的观察、比较、分析、总结、抽象概括和实际应用的能力。在录制微课视频时，对 PPT 的制作要求很高，应该告诉学生什么，如何告诉他们，蕴含何种思想，教师要精心设计每一页课件的内容，在何处如何设置动画，如何让学生清晰的理解，如何让学生学到的每一步都是明白的、有据的，不要跳步，最终完全掌握其本质，都需要教师提前精心的设计。经过精心设计的微课是课堂教学的辅助、补充，在教学中起到了事半功倍的效果，对提升教学效果将具有非常重要的意义。

参考文献

[1] 罗刚淮.从“微课微型课题微型讲座”例谈教师的教学研究[J].学校党建与思想教育,2012(20):47-49.

[2] 赵晓,辛林.翻转课堂教学模式下的线性代数微课应用研究[J].宁德师范学院学报,2017(3):323-327.

[3] 李琴.浅析微课设计与制作的理论与实践[J].无限互联科技,2015(5):105-106.

[4] 王发兴,郑莹.浅谈线性代数微课设计——以向量组的最大无关组与秩为例[J].大学数学,2020,36(2):77-81.