性维护，降低系统停机风险；根据用户反馈和行为分析，持续优化服务质量，提高用户满意度。

4.3 资源共享与协同计算

策略概述：充分发挥云计算的资源共享优势，促进设备间的协同计算，提高整体系统效能。

实施措施：将计算能力分布到网络边缘，减少数据传输延迟，实现近实时数据处理；通过云平台实现设备间的协同，支持多种智能设备共同处理复杂任务，提高系统响应速度；提供开放的API接口，促进不同应用之间的集成与协同，推动生态系统的建设。

4.4 安全性与隐私保护策略

策略概述：在云计算和人工智能的融合应用中，注重网络安全和用户隐私的保护，构建安全可靠的通信环境。

实施措施：采用最新的加密技术保护数据传输与存储，建立严格的访问控制机制，确保用户数据安全；利用AI技术进行网络安全监测，实时检测异常行为与安全威胁，快速响应并采取相应措施；制定隐私保护政策，明确数据使用范围，增强用户对数据处理的知情权与控制权。

4.5 跨行业应用与创新

策略概述：推动智能通信系统在不同行业中的应用，促进技术创新与业务模式的转型。

实施措施：加强与各行业的合作，制定行业标准与规范，推动智能通信技术的普及；在智能交通、智能医疗、智慧城市等领域探索具体应用场景，推动技术落地与商业化；结合AI与云计算的优势，探索新的商业模式，如基于数据的服务模式、按需付费等，提升市场竞争力。

5 总结

在本文中，我们探讨了云计算与人工智能在智能通信系统中的深度融合技术及其应用。总而言之。云计算与人工智能的结合为智能通信系统的未来发展开辟了广阔的前景。随着技术的不断演进和应用场景的丰富，预计这一融合将进一步推动通信行业的转型与升级，为社会的数字化转型贡献力量。未来的研究可以聚焦于具体应用案例的深入分析，以及在不同市场环境下的适应性策略，为实现更加智能化的通信服务提供更多指导。

参考文献

[1] 武强, 季雪庭, 吕琳媛. 元宇宙中的人工智能技术与应用[J]. 智能科学与技术学报, 2022, 4(3): 324-334.

[2] Wen X, Zheng Y. The application of artificial intelligence technology in cloud computing environment resources[J]. Journal of Web Engineering, 2021, 20(6): 1853-1866.

[3] 欧阳晔, 王立磊, 杨爱东, 等. 通信人工智能的下一个十年[J]. 电信科学, 2021, 37(3): 1-36.

[4] Wen X, Zheng Y. The application of artificial intelligence technology in cloud computing environment resources[J]. Journal of Web Engineering, 2021, 20(6): 1853-1866.

The Characters of a Class of Special Three-Part Standard Parabolic Subgroup Unipotent Radicals

Yike Li　Shuo Liu　Xiaolei Fang

Wuhan Polytechnic University, Wuhan, Hubei, 430000, China

Abstract

This paper completely characterizes all the irreducible representations of a special class of unipotent radicals corresponding to the standard parabolic subgroups. By applying the Clifford theory of semi-direct products of Abelian normal subgroups, all the irreducible characters of the group are successfully constructed from the coadjoint orbits and precisely classified by dimension. The research results show that for any fixed dimension, the number of irreducible representations of can be expressed as a polynomial function with non-negative integer coefficients of . This important discovery not only reveals the quantitative law of the representations of this class of groups, but also strictly mathematically verifies the analog conjecture of the finite group representation conjecture proposed by Higman, Lehrer and Isaacs, providing new examples and support for the development of related theories.

Keywords

Coadjoint orbits; Pattern groups; Upper triangular groups; Higman conjecture

一类特殊三部分标准抛物子群幂幺根基的特征标

李奕可　刘朔　方晓磊

武汉轻工大学，中国 · 湖北 武汉 430000

摘　要

本文完整刻画了GL_6对应划分为(2,2,2)的标准抛物子群的一类特殊幂幺根基G_E的所有不可约表示. 通过运用阿贝尔正规子群半直积的Clifford理论, 从共伴随轨道成功构建了该群的全部不可约特征标, 并将其按维数进行精确分类. 研究结果表明: 对于任意固定维数,G_E的不可约表示的个数均可表示为q−1的非负整系数多项式函数. 这一重要发现不仅揭示了该类群表示的数量规律, 更从严格数学意义上验证了Higman、Lehrer和Isaacs提出的关于有限群表示猜想的模拟猜想, 为相关理论的发展提供了新的例证和支持。

关键词

共伴随轨道；pattern群；上三角群；Higman猜想

1 引言

群表示理论是现代数学的主要分支之一，它在物理、化学及信息科学等诸多研究领域都有着广泛的应用．在物理学中，群表示是用来描述粒子的分类和对称规律的一般方法，例如：群表示可以在量子力学中清楚地刻画原子能级分裂的情况；在凝聚态物理中，它为研究晶体结构的对称性与电子能带结构的关系提供了重要理论支撑．群表示理论在化学方面可用于分析分子振动模式、电子结构等问题，协助揭示一些简单的分子的光谱特性和化学性．在信息科学领域，群表示理论有着重要的应用，例如设计具有高安全性的密码系统和高效的纠错码．特别是在有限群表示的研究中，不可约表示的构造与分类一直是学者们关注的焦点问题，其研究成果不仅能够深化对有限群结构与性质的理解，还能推动相关交叉学科的发展．

本文主要研究一般线性群 GL_6 对应划分为 (2,2,2) 的标准抛物子群的一类特殊幂幺根基 G_E 的所有不可约表示．该群具有清晰的矩阵结构特征，其矩阵形式明确规定了各分块矩阵的取值范围与约束条件，这种结构化的特点为我们深入探索其表示性质提供了良好的研究对象．自 Higman 于 1960 年提出关于上三角群共轭类数量的著名猜想 [1]：上三角群 $U_n(\mathrm{IF}_q)$ 的共轭类个数是 q 的整数系数多项式．这一猜想便成为有限群表示理论领域的重要研究方向，激发了众多学者的研究兴趣．Lehrer 和 Isaacs 等人相继对此猜想进行了强化，提出了两个更具深度的猜想：

猜想 1.1[2]：$U_n(\mathrm{IF}_q)$ 中维数为 q^e 的不可约表示的个数是

【项目来源】武汉轻工大学校级科研项目“标准抛物子群幂幺根基的特征标的研究”(NO.2025Y35)；武汉轻工大学引进（培养）人才科研启动项目“复形作为范畴表示的相关问题的研究”(NO.2025R2066)。

【作者简介】李奕可（1995–），女，中国湖南益阳人，博士，讲师，从事代数学研究。

q 的整数系数多项式 .

猜想 1.2[3]: $U_n(\mathrm{IF}_q)$ 中维数为 q^e 的不可约表示的个数是 $q-1$ 的非负整数系数多项式 .

这些猜想推动了该领域数十年的发展 , 类似猜想已被推广到多种具有相似结构的有限群中 , 如 : 三部分标准抛物子群的幂零根基 [4]; 有限 Chevalley 群的 Sylow p- 子群 [5-9] 等 . 值得注意的是 , 某些 pattern 群的共轭类的个数并非的多项式函数 , 这一特殊情况为研究增添了复杂性与多样性 . 但对 pattern 群的特征标的研究仍具有重要意义 , 部分 pattern 群的不可约特征标确实满足上述猜想 ([10]-[14]), 这也为我们进一步验证猜想、探索有限群表示的普遍规律提供了重要依据 .

设 IF_q 是包含 q 个元素的有限域 ,$U_n(\mathrm{IF}_q)$ 表示由所有主对角线元素为 1 的 $n\times n$ 上三角矩阵构成的上三角群 . 取固定矩阵 $E\in\mathrm{Mat}_2$, $r(E)=1$, 令

$$G_E=\left\{\left.\begin{pmatrix} I_2 & C & B \\ 0 & I_2 & D \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}\right| B,C,D\in\mathrm{Mat}_2, \text{且 } ED=0\right\}.$$

该群是 GL_6 中对应于划分为 (2,2,2) 的准抛物子群的一类特殊幂零根基 . 本文利用阿贝尔正规子群半直积的 Clifford 定理 , 完整刻画了其特征标的结构 . 我们的研究结果不仅揭示了该群表示的精细结构 , 清晰展现不同维数特征标的分布规律与构造方式 , 更从严格数学意义上验证了 Higman、Lehrer 和 Isaacs 提出的关于有限群表示猜想的模拟猜想 , 为该理论的发展提供了新的支持 , 进一步丰富了有限群表示理论的研究成果 .

2 预备知识

2.1 Pattern 群

记 $\mathrm{Mat}_{n\times m}$ 为 $n\times m$ 矩阵构成的集合 , Mat_n 为 $n\times n$ 矩阵构成的集合 . 对于任意有限集 X, 该集合元素的个数记为 $\#X$. 记 $\Delta_n=\{(i,j)|1\le i<j\le n\}$, 对于 Δ_n 的任意子集 D, 若满足 $(i,j)\in D$ 且 $(j,k)\in D$, 可推出 $(i,k)\in D$. 则称 D 为封闭集 . 记 $\mathrm{Lie}(U_n)$ 是 U_n 的李代数 , 定义 $\mathrm{Lie}(U_n)$ 的子代数

$$A_D=\{(n_{i,j}\in\mathrm{Lie}(U_n))|\text{ 如果 } (i,j)\notin D, \text{ 则 } n_{i,j}=0\}$$

令 $G_D=1+A_D\subseteq U_n$, 分别称 A_D 和 G_D 是对应 D 的 pattern 代数和 pattern 群 .

取 矩 阵 $\in\mathrm{Lie}(U_n)$, 记 $J(c)=\{(i,j)\in\Delta_n|c_{i,j}\neq 0\}$, $J(c)$ 能够清晰地标识出矩阵 c 中非零元素的位置 . 取子集 $X\subset\mathrm{Mat}_n$, 记 $J(X)=\cup_{c\in X}J(c)$, 通过 $J(X)$ 可以对集合 X 中所有矩阵的非零元素位置进行整体刻画 .

2.2 共伴随轨道

任意记为 $1+A$ 的 pattern 群 , 通过迹映射 , 可以定义李代数 A 的对偶空间 A^t. 取 $g\in 1+A$, 它在 $\alpha\in A^t$ 上的共伴随作用定义为 [15]: $(g\cdot\alpha)(a)=\mathrm{tr}(\alpha g a g^{-1})$, $a\in A$. 记为 $\alpha\mapsto[g^{-1}\alpha g]$, 其中 $[\cdot]_A$ 是从 Mat_n 到 A^t 的射影 . 也就是对于 $m=(m_{i,j})\in\mathrm{Mat}_n$, 有

$$[m_A]_{i,j}=\begin{cases} m_{i,j}, (j,i)\in J(A) \\ 0, (j,i)\notin J(A) \text{或 } i\le j \end{cases}$$

将 $1+A$ 在 A^t 上的作用记为 $g\circ_A\alpha=[g^{-1}\alpha g]_A$, $g\in 1+A$, $\alpha\in A^t$. 对任意 $a\in A$, 均有

$$g\cdot\alpha(a)=\mathrm{tr}([g^{-1}\alpha g]_A a).$$

该作用 $\circ_A$ 称为共伴随作用 , 生成的轨道为共伴随轨道 .

3 G_E 的不可约表示

本章 , 我们将利用阿贝尔正规子群半直积的 Clifford 定理 , 完整描述 G_E 的特征标 . Clifford 定理作为有限群表示理论中的重要定理 , 为研究具有阿贝尔正规子群的群的表示提供了强有力的工具 , 它揭示了群的不可约表示与子群表示之间的深刻联系 , 使得我们能够通过子群的表示来构造和分析整个群的表示 . 假设有限群 $G=A\rtimes H$, 其中 A 是 G 的阿贝尔正规子群 . 令 $\widehat{A}$ 是由 A 的所有特征标构成的集合 , $h\in H$ 在 $\widehat{A}$ 上的作用记为 $h\cdot\chi=\chi^h$, 其中 $\chi^h\in\widehat{A}$ 且 $\chi^h(a)=\chi(h^{-1}ah)$, $a\in A$. 令 $H_\chi=\{h\in H\mid\chi^h=\chi\}$, G 的不可约表示可由如下形式构成 .

定理 2.1[16]: 取 χ , $\chi'\in\widehat{A}$, τ , $\tau'\in\widehat{H_\chi}$, 如下结论成立 :

(1) $\mathrm{Ind}_{H_\chi\rtimes A}^{G}\tau\otimes\chi$ 是 G 的一个不可约表示 ;

(2) 当且仅当 χ 和 χ' 在同一 H-轨道且 $\tau\cong\tau'$ 时 , $\mathrm{Ind}_{H_\chi\rtimes A}^{G}\tau\otimes\chi\cong\mathrm{Ind}_{H_{\chi'}\rtimes A}^{G}\tau'\otimes\chi'$;

(3) G 的每一不可约表示都同构于某一 $\mathrm{Ind}_{H_\chi\rtimes A}^{G}\tau\otimes\chi$.

当 $A=1+V$ 是阿贝尔 pattern 群时 $\widehat{A}=\{\psi_T|\,T\in V^t\}$, 其中 $\psi_T(x)=\psi(\mathrm{tr}Tx)$, $x\in A$.

定理 2.2: 对于秩为 1 的固定矩阵 $E\in\mathrm{Mat}_2$, 群 G_E 有如下特征标 :

q^6 个 1 维特征标, 形式为 $\mathrm{Ind}_{H_{\psi_{u(C,0)}}\rtimes A}^{G_E}\tau\otimes\psi_{u(C,0)}$.

$q^4(q^2-1)(q+1)$ 个 q 维特征标, 形式为 $\mathrm{Ind}_{H_{\psi_{u(C'',B)}}\rtimes A}^{G_E}\tau\otimes\psi_{u(C',B)}$.

$q^2(q^2-1)(q^2-q)$ 个 q^2 维特征标, 形式为 $\mathrm{Ind}_{H_{\psi_{u(C',B)}}\rtimes A}^{G_E}\tau\otimes\psi_{u(C'',B)}$.

证明 : 不失一般性 , 取

$$E=\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ ke_1 & ke_2 \end{pmatrix}, e_1\neq 0, D=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

根据限制 $ED=0$, 通过矩阵乘法运算与线性方程组求解 , 我们可以推导出

$$D=\begin{pmatrix} -\frac{e_2}{e_1}d_3 & -\frac{e_2}{e_1}d_4 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}.$$

记

$$G_E=A\rtimes H=\left\{\begin{pmatrix} I_2 & C & B \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}\right\}\rtimes\left\{\left.\begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & D \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}\right| ED=0\right\},$$

我们就可以通过计算 $\widehat{A}$ 上的 H-轨道来构造 G_E 的所有不可约表示 . 为了在每一轨道上选择恰当的代表元 , 令

$$u(X,Y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 \end{pmatrix}\in V^t$$

取 $u_1,u_2\in V^t$, 若存在 $h\in H$, 使得 $[h^{-1}u_2h]_V=u_1$, 就记为