

# 基于解析均匀化模型的蜂窝夹芯板静力弯曲分析

## Static Bending Analysis of Honeycomb Sandwich Plate Based on Analytical Homogenization Model

赵铁龙

Tielong Zhao

1.沈阳航空航天大学航空航天工程学部(院),中国·辽宁 沈阳 110136

2.北京石头科技有限公司,中国·北京 100089

1. Department of Aerospace Engineering, Shenyang University of Aeronautics and Astronautics, Shenyang, 110136, China

2. Beijing Stone Technology Co., Ltd., Beijing 100089, China

**【摘要】**本文基于精化锯齿层合板理论建立了蜂窝夹芯板静力弯曲模型。模型通过解析均匀化方法获取了蜂窝芯层的等效弹性参数,并因引入该方法而能够反映出由蜂窝高度改变引起的蜂窝等效模量变化对弯曲挠度产生的影响(蜂窝芯子的高度效应)。基于虚功原理推导了平衡方程和边界条件,并以受双向正弦载荷作用的四边简支板为例进行了算例分析。算例结果表明:当夹芯板跨厚比较小时,基于本文模型所预测的板弯曲刚度与传统单层板理论给出的结果基本一致。随着板的变薄,本文模型给出的结果明显小于一阶剪切板理论,略小于高阶剪切板理论;不受几何因素影响的蜂窝夹芯板无量纲弯曲挠度先随蜂窝高度的增加逐渐增长,随后趋于稳定;蜂窝芯子高度效应在板跨厚比、蜂窝芯层厚度比例取较大值时明显。随着蜂窝芯层厚度比例的下降或板的变厚,高度效应逐渐减弱直至消失。

**【Abstract】**A new static bending model of honeycomb sandwich plate was developed based on Refined Zigzag Theory. The equivalent mechanic properties of honeycomb core were obtained through an analytical homogenization method, which enables present model to reflect the influences of equivalent modulus alterations on bending deflections causing by honeycomb height change, i.e. honeycomb core height effect. The equilibrium equations and corresponding boundary conditions were derived by adopting virtual work principle. A simply supported square plate subjected to a double sinusoidal distributed load was taken as the illustrative example and analytically solved. Numerical results indicated that the bending stiffness given by the present model is basically consistent with that of classical single-layer plate theory as the aspect ratio is smaller. With the plate thinning, the present results is obviously smaller than those of First-order shear deformation plate theory and slightly smaller than those of Third-order shear deformation plate theory. The dimensionless bending deflections unrelated to geometry increase gradually with the increase of honeycomb height at first, and then tend to stability; The honeycomb core height effect is obvious when the aspect ratio or the ratio of core height to plate thickness is bigger, but weaken gradually and disappears finally as the one of these two ratios is decreasing.

**【关键词】**解析均匀化;精化锯齿理论;蜂窝夹芯板;高度效应;弯曲挠度

**【Keywords】**analytical homogenization; refined zigzag theory; honeycomb sandwich plate; height effect; bending deflection

**【DOI】**<https://doi.org/10.26549/gcjsygl.v3i1.1292>

## 1 引言

蜂窝夹芯板力学解析模型的建立能够有效反映结构自身力学性能并达到预测其在外加载荷作用下力学响应的目的。由于蜂窝材料具有高度几何和结构复杂性,通过考虑真实蜂窝模型对蜂窝夹层结构进行力学建模将十分困难。相比之下,利用具有等效材料性质的均质实体代替蜂窝芯层将大幅度提高计算效率、节省计算成本。在早期的蜂窝等效参数研究工作中,Gibson和Ashby<sup>[1,2]</sup>首先将蜂窝壁板视为Bernoulli-Euler梁并基于胞元材料理论给出了等壁厚蜂窝与双壁厚蜂窝等效参数公式。然而,经典Gibson公式仅考虑蜂窝壁板的

弯曲变形,而忽略了由表板约束引起的壁板伸缩变形。富明慧等<sup>[3]</sup>重新考虑了蜂窝壁板的伸缩变形对面内刚度的影响,对Gibson公式进行了修正。基于该蜂窝等效参数解析公式,大量蜂窝夹层结构力学性能分析工作得以开展<sup>[4-6]</sup>。

需要指出的是,大多数等效方法<sup>[7,8]</sup>中均对蜂窝芯层进行独立折算而并未考虑到其变形时上下表板对其产生的抑制作用。Becker<sup>[9]</sup>则首次采用基于应变能的均匀化方法给出了六边形蜂窝的面内等效参数,并指出蜂窝芯的有效刚度因受刚度较大的表板作用而与蜂窝高度紧密相关。由于蜂窝结构在实际工程中并非单独使用,而是作为芯子与相对厚度较薄,刚

度较大的表板材料共同组成层合结构,因此这种蜂窝芯子等效模量的高度效应则应予以重视。2015年, Li<sup>[10]</sup>等通过三角函数系列来模拟蜂窝壁板在多组载荷条件下的真实位移场,并基于能量均匀化方法给出了蜂窝芯子拉伸、弯曲问题的等效解析公式。由于该工作考虑到表板-芯子连接处刚性表板对蜂窝芯子的抑制作用以及远离表板处应力的重新分布,因此能够描述蜂窝芯子的高度效应。随后, Li等<sup>[11]</sup>又给出了蜂窝芯子在面内剪切、扭转以及横向剪切问题中的等效解析公式。算例结果证明基于新解析均匀化模型得到的等效模量与数值结果高度一致。

本文基于精化锯齿理论(Refined Zigzag Theory, RZT)<sup>[12,13]</sup>对蜂窝夹芯板进行了静力弯曲分析。该理论具有较高的层合结构力学性能预测精度与包含高度不均匀夹心结构在内的广阔适用范围。通过解析均匀化模型获取了蜂窝芯子的等效模量,并因引入该方法而能够反映由蜂窝高度变化引起的蜂窝芯子模量改变对夹芯板整体弯曲挠度产生的影响。

## 2 基于解析均匀化模型的蜂窝芯子等效参数

建立在能量均匀化方法之上的解析均匀化模型利用真实蜂窝特征单元体 (Representative Elementary Volume, REV) 内应变能  $\pi_{in}$  与等效后均质实体应变能  $\pi_{in}^*$  相等的原理折算出蜂窝芯子等效弹性参数,该原理可表述为:

$$\pi_{in}^* = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]^T [E^*] [\varepsilon] dV = \pi_{in} \quad (1)$$

式中:  $\bar{V} = Ah_c/2$  为1/8蜂窝REV等效体积(由于REV具有三重对称性,因此仅1/8部分计入等效过程);  $A = \delta_2 \cos \theta (\delta_1 + \delta_2 \sin \theta)$  为REV表面1/4,  $h_c$  为蜂窝高度;  $t_1, \delta_1$  分别为蜂窝竖直壁板厚度的1/2与长度;  $t_2, \delta_2$  分别为倾斜壁板厚度与长度;  $[E^*]$  为蜂窝芯子等效刚度矩阵,  $\varepsilon$  则代表1/8蜂窝REV内的应变分量。

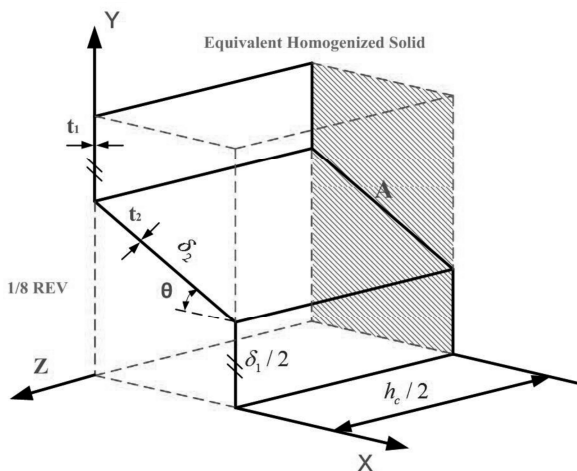


图1 1/8蜂窝REV与相应等效实体

## 3 等效刚度系数解析公式

解析均匀化模型借助于有限元方法获取蜂窝芯子在刚性表板抑制下的蜂窝壁板真实变形,并通过适当函数模拟其位移以此获取蜂窝REV内应变能  $\pi_{in}$ ,随后利用能量均匀化等式分别折算出蜂窝芯子各等效弹性参数。

### 3.1 等效拉伸/弯曲刚度矩阵系数

对应于平面拉伸问题,其能量均匀化等式为:

$$\varepsilon_x^2 C_{11}^{*s} + 2\varepsilon_x \varepsilon_y C_{12}^{*s} + \varepsilon_y^2 C_{22}^{*s} = \frac{2\pi_{in}}{\bar{V}} \quad (2)$$

式中:  $C_{11}^{*s}$ ,  $C_{12}^{*s}$  和  $C_{22}^{*s}$  分别为已考虑泊松效应的等效拉伸刚度矩阵系数;  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  分别为沿 X 轴和 Y 轴方向正应变;  $\pi_{in}$  为1/8蜂窝REV内应变能。对应于平面拉伸问题,文献给出其表达式:

$$\begin{aligned} \pi_{in} = & \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2) a_1^2 + \frac{h_c}{4} t_1 \delta_1 \varepsilon_y^2 + \frac{h_c}{4} t_2 \delta_2 \varepsilon_l^2 \right. \\ & - 2b(t_1 \varepsilon_y - t_2 \varepsilon_l \sin \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} a_k + \frac{h_c \pi^2}{16} \left( \frac{t_1}{\delta_1} + \frac{t_2}{\delta_2} \sin^2 \theta \right) \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n^2 a_k^2 + v(t_1 \delta_1 \varepsilon_y + t_2 \delta_2 \varepsilon_l) a_1 - 4v(t_1 - t_2 \sin \theta) a_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \\ & \left. \sin \frac{m\pi}{2} a_k + \frac{(1-\nu)\pi^2}{32h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2 \sin^2 \theta) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 a_k^2 \right] \quad (3) \end{aligned}$$

式中:  $E, \nu$  分别为蜂窝材料弹性模量及泊松比;  $\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta$ ;  $m = 2i - 1, n = 2j - 1, k = N(i - 1) + j + 1$ ;  $N$  为函数项数,其值取决于  $\pi_{in}$  计算结果收敛性。

对应于弯曲问题,其能量均匀化等式为:

$$\frac{Ah_c^3}{48} (\kappa_x^2 C_{11}^{*b} + 2\kappa_x \kappa_y C_{12}^{*b} + \kappa_y^2 C_{22}^{*b}) = \frac{\pi_{in}}{\bar{V}} \quad (4)$$

式中:  $C_{11}^{*b}$ ,  $C_{12}^{*b}$  和  $C_{22}^{*b}$  分别为已考虑泊松效应的等效弯曲刚度矩阵系数;  $\kappa_x, \kappa_y$  分别为弯曲曲率。弯曲问题中  $\pi_{in}$  表达式为:

$$\begin{aligned} \pi_{in} = & \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2) (a_1^2 + 2a_1 a_2 + \frac{4}{3} a_2^2) + h_c^3 \frac{t_1 \delta_1 \kappa_y^2 + t_2 \delta_2 \kappa_l^2}{48} \right. \\ & - (t_1 \kappa_y - t_2 \kappa_l \sin \theta) h_c^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} a_k + h_c \left( \frac{t_1}{\delta_1} + \frac{t_2}{\delta_2} \sin^2 \theta \right) \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{n^2 \pi^2}{16} a_k^2 - 2vh_c \frac{t_1 \delta_1 \kappa_y + t_2 \delta_2 \kappa_l}{8} a_1 - 2vh_c \frac{t_1 \delta_1 \kappa_y + t_2 \delta_2 \kappa_l}{6} a_1 \\ & + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2 \sin^2 \theta}{h_c} \right) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m^2 \pi^2 a_k^2}{16} - v(t_1 - t_2 \sin \theta) \\ & \left. \left( a_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{4a_k}{m\pi} (1 - \cos \frac{m\pi}{2}) - a_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{8a_k}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} \right) \right] \quad (5) \end{aligned}$$

式中:  $\kappa_l = \kappa_x \cos^2 \theta + \kappa_y \sin^2 \theta$ ;  $m = 2i, n = 2j - 1, k = N(i - 1) + j + 2$ ;  $a_1, a_2$  和  $a_k$  为  $\pi_{in}$  中未知系数,其计算方法为:

$$\frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_2} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_i} = 0 \quad (6)$$

### 3.2 等效剪切/扭转模量

对应于面内剪切问题,其能量均匀化等式为:

$$\frac{1}{2} G_{XY}^{*S} \gamma_{XY}^2 \frac{h_c}{2} \delta_2 \cos \theta (\delta_1 + \delta_2 \sin \theta) = \pi_{int} \quad (7)$$

式中:  $G_{XY}^{*S}$  为等效面内剪切模量,  $\gamma_{XY}$  为面内剪切应变。

$\pi_{int}$  表达式为:

$$\begin{aligned} \pi_{int} = & \frac{1}{2} \frac{E}{1-v^2} \left[ \frac{2(t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2)}{h_c} a_0^2 - 2v t_2 \delta_2 a_0 \beta \gamma_{XY} \right. \\ & - 4v t_2 a_0 \cos \theta \sum_{i=1}^N \frac{(b_i - c_i)}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{h_c t_2 \delta_2}{2} \beta^2 \gamma_{XY}^2 \\ & + 2t_2 \beta \gamma_{XY} \cos \theta \sum_{i=1}^N \frac{b(b_i - c_i)}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{h_c t_2}{4\delta_2} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 \\ & + \frac{1-v}{24} \frac{t_2 \delta_2}{h_c} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \\ & + \frac{D_1}{2} \left[ \frac{1}{24} \frac{\delta_1}{h_c^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 (a_i^2 + a_i b_i + b_i^2) + \frac{(1-v)}{h_c \delta_1} \sum_{i=1}^N (a_i - b_i)^2 m^2 \pi^2 \right] \\ & + \frac{D_2}{2} \left[ \frac{1}{12} \frac{\delta_2}{h_c^3} \sin^2 \theta \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \right. \\ & + \frac{1-v}{2} \frac{\sin^2 \theta}{h_c \delta_2} \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 m^2 \pi^2 \sin^2 \theta \\ & \left. + \frac{D_3}{2} \left[ \frac{1}{24} \frac{\delta_1}{h_c^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 c_i^2 + \frac{1-v}{h_c \delta_1} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 c_i^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $\beta = \sin \theta \cos \theta$ ,  $m = 2i - 1$ ;  $D$  为各蜂窝壁板弯曲刚度:  $D_1 = D_3 = Et_i^3/3(1-v^2)$ ,  $D_2 = Et_i^3/12(1-v^2)$ 。

对应于面内扭转问题,其能量均匀化等式为:

$$G_{XY}^{*T} \frac{h_c^3}{48} \delta_2 \cos \theta (\delta_1 + \delta_2 \sin \theta) \kappa^2 = \pi_{int} \quad (9)$$

式中:  $G_{XY}^{*T}$  为等效面内扭转模量,  $\kappa$  为面内扭转曲率。

$\pi_{int}$  表达式为:

$$\begin{aligned} \pi_{int} = & \frac{1}{2} \frac{E}{1-v^2} \left[ \frac{h_c(t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2)}{6} a_0^2 - \frac{t_2 v \delta_2 h_c^2 \beta \kappa a_0}{6} + 2v t_2 a_0 \cos \theta \right. \\ & \sum_{i=1}^N \frac{h_c (b_i - c_i)}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} + \frac{t_2 h_c^3 \delta_2 \kappa^2 \beta^2}{24} - t_2 \cos \theta \\ & \sum_{i=1}^N \frac{(b_i - c_i)}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{2} h_c^2 \kappa \beta + \frac{t_2 h_c}{4\delta_2} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 + \frac{1-v}{24} \frac{t_2 \delta_2}{h_c} \\ & \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) + \frac{D_1}{2} \left[ \frac{1}{24} \frac{\delta_1}{h_c^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 (a_i^2 + a_i b_i + b_i^2) \right. \\ & + \frac{(1-v)}{h_c \delta_1} \sum_{i=1}^N (a_i - b_i)^2 m^2 \pi^2 + \frac{D_2}{2} \left[ \frac{1}{12} \frac{\delta_2}{h_c^3} \sin^2 \theta \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 (b_i^2 + b_i c_i + c_i^2) \right. \\ & + \frac{1-v}{2} \frac{\sin^2 \theta}{h_c \delta_2} \sum_{i=1}^N (b_i - c_i)^2 m^2 \pi^2 + \frac{D_3}{2} \left[ \frac{1}{24} \frac{\delta_1}{h_c^3} \sum_{i=1}^N m^4 \pi^4 c_i^2 + \right. \\ & \left. \left. \frac{1-v}{h_c \delta_1} \sum_{i=1}^N m^2 \pi^2 c_i^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $m = 2i$ ;  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  和  $c_i$  为  $\pi_{int}$  中未知系数,其计算方法为:

$$\frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_0} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_i} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial b_i} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial c_i} = 0 \quad (11)$$

### 3.3 等效横向剪切模量及密度

对应于横向剪切问题,其能量均匀化等式为:

$$\frac{1}{2} G_{YZ}^* \gamma_0^2 \delta_2 \cos \theta (\delta_1 + \delta_2 \sin \theta) \frac{h_c}{2} = \pi_{int} \quad (12)$$

式中:  $G_{YZ}^*$  为等效横向剪切模量,  $\gamma_0$  为蜂窝结构横向剪切应变。  $\pi_{int}$  表达式为:

$$\begin{aligned} \pi_{int} = & \frac{E}{1-v^2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p^2 \pi^2}{24 h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2) + \frac{h_c (1-v)}{4} \left( \frac{t_1}{\delta_1} + \frac{t_2}{\delta_2} \right) \right] a_p^2 \right. \\ & + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p^2 \pi^2}{40 h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2) + \frac{h_c (1-v)}{3} \left( \frac{t_1}{\delta_1} + \frac{t_2}{\delta_2} \right) \right] b_p^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p^2 \pi^2}{16 h_c} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2) + \frac{h_c (1-v)}{2} \left( \frac{t_1}{\delta_1} + \frac{t_2}{\delta_2} \right) \right] a_p b_p \\ & + (1-v) \gamma_0 (t_1 - t_2 \sin \theta) \sum_{i=1}^N \left[ \frac{h_c}{p\pi} (a_p + b_p) \right. \\ & + \frac{h_c (1-v)}{8} (t_1 \delta_1 + t_2 \delta_2 \sin^2 \theta) \gamma_0^2 + \frac{t_2 h_c}{16 \delta_2} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n^2 \pi^2 c_{m,n}^2 \\ & \left. + \frac{1-v}{2} \frac{t_2 \delta_2}{16 h_c} \cos^2 \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m^2 \pi^2 c_{m,n}^2 + 2t_2 (1-v) \cos \theta \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{mp}{p^2 - m^2} \frac{1}{n\pi} a_p c_{m,n} + 4t_2 (1-v) \right. \\ & \left. \cos \theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{mp}{p^2 - m^2} \frac{1}{n\pi} \left( 1 - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \right) b_p c_{m,n} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $m = 2i_1$ ,  $n = 2j_1 - 1$ ,  $p = 2i_2 - 1$ 。  $a_p$ ,  $b_p$  和  $c_{m,n}$  为  $\pi_{int}$  中未知系数,其计算方法为:

$$\frac{\partial \pi_{int}}{\partial a_p} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial b_p} = 0 \quad \frac{\partial \pi_{int}}{\partial c_{m,n}} = 0 \quad (14)$$

此外,对于其它等效横向剪切模量  $G_{YZ}^*$  以及蜂窝芯子等效密度  $\rho^*$ ,文献指出其等效过程不存在蜂窝芯子的高度效应,因此其等效方法可沿用传统蜂窝芯子等效公式:

$$G_{YZ}^* = \frac{E}{2(1+v)} \frac{t_2}{\delta_2} \frac{\cos \theta}{\delta_1 / \delta_2 + \sin \theta} \quad (15)$$

### 3.4 拉伸-弯曲/剪切-扭转耦合等效公式

通过观察式与式,式与可知,面内拉伸/剪切等效公式并不适用于弯曲以及扭转问题,因此,文献将蜂窝芯子划分为三层等厚 ( $h_c/3$ ) 均质实体,并给出每层均质实体在面内拉伸-弯曲耦合问题中的等效刚度矩阵系数公式:

$$E_U^*/E_L^* = \frac{1}{24} (27C_i^{*B} - 3C_i^{*S}) \quad (16)$$

$$E_M^* = \frac{1}{12} (39C_i^{*S} - 27C_i^{*B})$$

以及面内剪切-扭转耦合问题中的等效剪切模量公式:

$$G_{XYU}^*/G_{XYL}^* = \frac{1}{24} (27G_{XY}^{*T} - 3G_{XY}^{*S}) \quad (17)$$

$$G_{XYM}^* = \frac{1}{12} (39G_{XY}^{*S} - 27G_{XY}^{*T})$$

式中:下角标U,L和M分别代表三层均质实体上、下及中间层;  $C_i^{*B}$ ,  $C_i^{*S}$  ( $i = 11, 12, 22$ ) 分别对应于式、式中的拉伸/弯曲等效刚度矩阵系数;  $G_{XY}^{*S}$ ,  $G_{XY}^{*T}$  则分别代表式和式中的等效面

内剪切和扭转模量。

#### 4 基于RZT的蜂窝夹芯板

如图2所示,六边形蜂窝夹芯板边长为  $a$  和  $b$ , 板厚为  $2h$ , 蜂窝芯层厚度为  $h_c$ ,  $x$  轴在板几何形芯面上且与  $z$  轴垂直。采用 Zigzag 型位移场<sup>[13]</sup>函数来描述蜂窝夹芯板内任意一点变形情况:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) + \phi_x^{(k)}(z)\varphi_x(x, y, t) \\ v^{(k)}(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) + \phi_y^{(k)}(z)\varphi_y(x, y, t) \\ w^{(k)}(x, y, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (18)$$

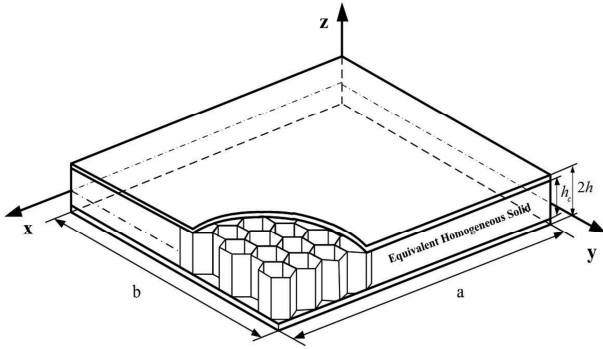


图2 六边形蜂窝夹芯板模型

式中:  $u, v, w$  分别为板任意一点沿  $x$  轴,  $y$  轴和  $z$  轴方向上的位移;  $u_0, v_0$  则为板几何形芯面上一点沿  $x$  轴和  $y$  轴方向上的位移;  $\theta_x$  和  $\theta_y$  分别为绕  $x$  轴和  $y$  轴的截面转角; 上角标  $k$  代表第  $k$  层单层板,  $t$  为时间变量;  $\phi_\alpha(\alpha=x, y)$  为分层线性锯齿函数,  $\varphi_\alpha$  则为其峰值函数。  $\phi_\alpha^{(k)}\varphi_\alpha$  可被视为一阶剪切变形位移场修正项而被用于描述多层结构变形情况。

夹芯板应变分量可由几何方程获得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(k)} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \phi_x^{(k)}(z)\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(k)} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \phi_y^{(k)}(z)\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) + \phi_x^{(k)}(z)\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \phi_y^{(k)}(z)\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^{(k)} &= \gamma_\alpha + \beta_\alpha^{(k)}\varphi_\alpha \quad (\alpha=x, y) \end{aligned} \quad (19)$$

其中:  $\beta_\alpha^{(k)} = \partial\phi_\alpha^{(k)}/\partial z$  为锯齿函数沿板厚度方向斜率;  $\gamma_\alpha = \theta_\alpha + \partial w/\partial \alpha$  对应于一阶剪切板理论中的横向剪切应变。蜂窝夹芯板各层本构关系为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} \\ & Q_{33}^{(k)} \\ & & Q_{44}^{(k)} \\ & & & & Q_{55}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

式中: 当  $k=1, 3$  时,

$$Q_{11}^{(k)} = E_1^{(k)}/(1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}), \quad Q_{12}^{(k)} = Q_{21}^{(k)} = \nu_{12}^{(k)}E_2^{(k)}/(1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}),$$

$Q_{22}^{(k)} = E_2^{(k)}/(1 - \nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}), \quad Q_{33}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, \quad Q_{44}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad Q_{55}^{(k)} = G_{23}^{(k)}$ 。  $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{21}$  分别为蜂窝夹芯板板材料弹性模量, 剪切模量及泊松比。当  $k=2$  时, 等效蜂窝芯层刚度矩阵系数及相应剪切模量由 2.1-2.4 节中各等效公式确定。

#### 4.1 锯齿函数

RZT 首先规定了斜率函数  $\beta_\alpha^{(k)}$  与各层横向剪切刚度系数之间的关系, 即:

$$\begin{aligned} Q_{44}^{(k)}(1 + \beta_x^{(k)}(z)) &= G_x \\ Q_{55}^{(k)}(1 + \beta_y^{(k)}(z)) &= G_y \end{aligned} \quad (21)$$

式中:  $G_\alpha (\alpha=x, y)$  为加权平均剪切刚度, 其值为常数。随后利用  $\int_{-h}^h \beta_\alpha^{(k)} dz = 0$  性质以及式获得  $G_\alpha$  完整表达式:

$$G_x = \left( \frac{1}{h} \sum_{k=1}^M \frac{h^{(k)}}{Q_{44}^{(k)}} \right)^{-1}, \quad G_y = \left( \frac{1}{h} \sum_{k=1}^M \frac{h^{(k)}}{Q_{55}^{(k)}} \right)^{-1} \quad (22)$$

式中:  $M$  代表层合结构层数;  $2h^{(k)}$  则为等  $k$  层单层板厚度。

将式代入式中获得  $\beta_\alpha^{(k)}$  表达式, 随后对表达式两端同时进行沿板厚度方向积分并利用  $\phi_\alpha^{(k)}(z)$  在  $z=-h$  以及  $z=h$  处为零的规定获得锯齿函数完整表达式:

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)}(z) &= (z+h) \left( \frac{G_1}{Q_{44}^{(1)}} - 1 \right) \\ \phi_y^{(1)}(z) &= (z+h) \left( \frac{G_1}{Q_{55}^{(1)}} - 1 \right) \quad (k=1) \\ \phi_x^{(k)}(z) &= (z+h) \left( \frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left( \frac{G_1}{Q_{44}^{(i-1)}} - \frac{G_1}{Q_{44}^{(k)}} \right) \\ \phi_y^{(k)}(z) &= (z+h) \left( \frac{G_2}{Q_{55}^{(k)}} - 1 \right) + \sum_{i=2}^k 2h^{(i-1)} \left( \frac{G_2}{Q_{55}^{(i-1)}} - \frac{G_2}{Q_{55}^{(k)}} \right) \quad (k=2, \dots, M) \end{aligned} \quad (23)$$

其中:  $z \in [z_{(k-1)}, z_{(k)}]$ , 且  $z_0 = -h, z_{(k)} = z_{(k-1)} + 2h^{(k)}$ 。

#### 4.2 静力弯曲平衡方程和边界条件

基于虚功原理推导蜂窝夹芯板静力弯曲平衡方程和边界条件。该原理可表述为:

$$\begin{aligned} \delta U - \delta W &= \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \\ &\quad - \iint_{\partial \Omega} q \delta w \, dx dy - \int_{\partial \Omega} (\bar{T}_x \delta u^{(k)} + \bar{T}_y \delta v^{(k)} + \bar{T}_z \delta w) dz ds = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式中:  $\delta U, \delta W$  分别为虚应变能和虚外力功;  $V$  为夹芯板整体区域;  $\Omega$  为几何中性面区域,  $\partial \Omega$  则为其边界;  $q$  为在板内加载的横向体力,  $\bar{T}_x, \bar{T}_y$  和  $\bar{T}_z$  则分别为在板边界处添加的沿  $x, y$  和  $z$  轴方向上的轴力。将式、式和式代入式经分部积分后整理得到平衡方程:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 & \delta v_0: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\
 \delta \theta_x: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} &= 0 & \delta \theta_y: \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} &= 0 \\
 \delta \varphi_x: \frac{\partial M_x^{\phi_s}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{\phi_s}}{\partial y} - Q_{xz}^{\beta_s} &= 0 & \delta \varphi_y: \frac{\partial M_y^{\phi_s}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^{\phi_s}}{\partial x} - Q_{yz}^{\beta_s} &= 0 \\
 \delta w: \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q &= 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

边界条件为:

$$\begin{aligned}
 n_x N_x + n_y N_{xy} &= \bar{N}_x \text{ 或 } u_0 = \bar{u}_0 \quad n_y N_y + n_x N_{xy} = \bar{N}_y \text{ 或 } v_0 = \bar{v}_0 \\
 n_x M_x + n_y M_{xy} &= \bar{M}_x \text{ 或 } \theta_x = \bar{\theta}_x \quad n_x M_{xy} + n_y M_y = \bar{M}_y \text{ 或 } \theta_y = \bar{\theta}_y \\
 n_x M_x^{\phi_s} + n_y M_{xy}^{\phi_s} &= \bar{M}_x^{\phi_s} \text{ 或 } \varphi_x = \bar{\varphi}_x \quad n_x M_{xy}^{\phi_s} + n_y M_y^{\phi_s} = \bar{M}_y^{\phi_s} \text{ 或 } \varphi_y = \bar{\varphi}_y \\
 n_x Q_{xz} + n_y Q_{yz} &= \bar{Q}_z \text{ 或 } w = \bar{w}
 \end{aligned} \tag{26}$$

式中:  $n_x, n_y$  分别为板边界处外法线方向与  $x$  轴,  $y$  轴夹角方向余弦, 且:

$$\begin{aligned}
 (N_x \ M_x \ N_y \ M_y \ N_{xy} \ M_{xy} \ Q_{xz} \ Q_{yz}) &= \int_{-h}^h (\sigma_x^{(k)} \ z \sigma_x^{(k)} \ \sigma_y^{(k)} \ z \sigma_y^{(k)} \ \tau_{xy}^{(k)} \ z \tau_{xy}^{(k)} \ \tau_{xz}^{(k)} \ \tau_{yz}^{(k)}) dz \\
 (M_x^{\phi_s} \ M_y^{\phi_s} \ M_{xy}^{\phi_s} \ M_x^{\beta_s} \ M_y^{\beta_s} \ M_{xy}^{\beta_s} \ Q_{xz}^{\beta_s} \ Q_{yz}^{\beta_s}) &= \int_{-h}^h (\sigma_x^{(k)} \phi_x^{(k)} \ \sigma_y^{(k)} \phi_y^{(k)} \ \tau_{xy}^{(k)} \phi_{xy}^{(k)} \ \tau_{xz}^{(k)} \beta_x^{(k)} \ \tau_{yz}^{(k)} \beta_y^{(k)}) dz \\
 (\bar{N}_x \ \bar{M}_x \ \bar{N}_y \ \bar{M}_y \ \bar{M}_{xy}^{\phi_s} \ \bar{M}_{xy}^{\beta_s} \ \bar{Q}_z) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{T}_x \ z \bar{T}_x \ \bar{T}_y \ z \bar{T}_y \ \bar{T}_x \phi_x^{(k)} \ \bar{T}_y \phi_y^{(k)} \ \bar{T}_z) dz
 \end{aligned} \tag{27}$$

## 5 算例分析

本节以双壁厚六边形蜂窝夹芯板为例, 计算简支夹芯板在双向正弦载荷 ( $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ ) 作用下的弯曲挠度并探究由蜂窝高度改变引起的蜂窝芯子等效模量变化对夹芯板刚度产生的影响。蜂窝壁板长度  $\delta_1 = \delta_2 = 4\text{mm}$ , 竖直壁板半厚度  $t_1 = 0.05\text{mm}$ , 倾斜壁板厚度  $t_2 = 0.05\text{mm}$ ,  $\theta = 30^\circ$ 。铝蜂窝弹性模量  $E_c = 69\text{GPa}$ , 泊松比  $\nu_c = 0.3$ , 密度  $\rho_c = 2700\text{kg/m}^3$ 。正交各向异性表板材料参数  $E_1 = 140\text{GPa}$ ,  $E_2 = 20\text{GPa}$ ,  $G_{12} = 10\text{GPa}$ ,  $G_{13} = 8\text{GPa}$ ,  $G_{23} = 4\text{GPa}$ , 泊松比  $\nu_{12} = 0.25$ 。

四边简支边界条件由式可知:

$$\begin{aligned}
 x=0, a: \quad v_0 = w = \theta_y = \varphi_y = N_x = M_x = M_x^{\phi_s} &= 0 \\
 y=0, b: \quad u_0 = w = \theta_x = \varphi_x = N_y = M_y = M_y^{\phi_s} &= 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

满足简支边界条件的位移试函数取为:

$$\begin{aligned}
 w &= W \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\
 \{u_0, \theta_x, \varphi_x\} &= \{U, \Theta_x, \psi_x\} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\
 \{v_0, \theta_y, \varphi_y\} &= \{V, \Theta_y, \psi_y\} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)
 \end{aligned} \tag{29}$$

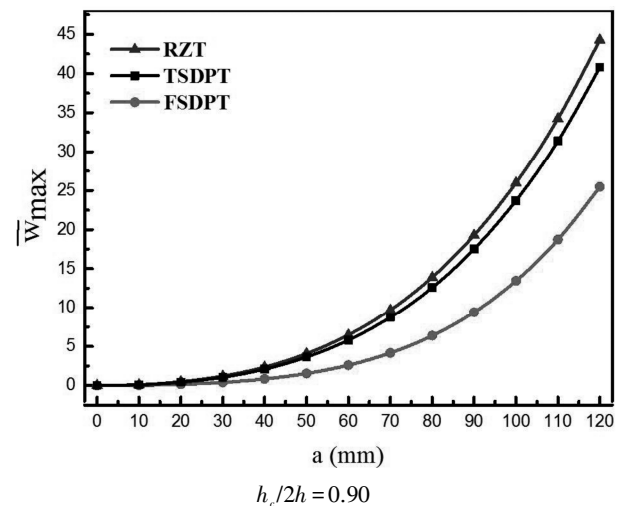
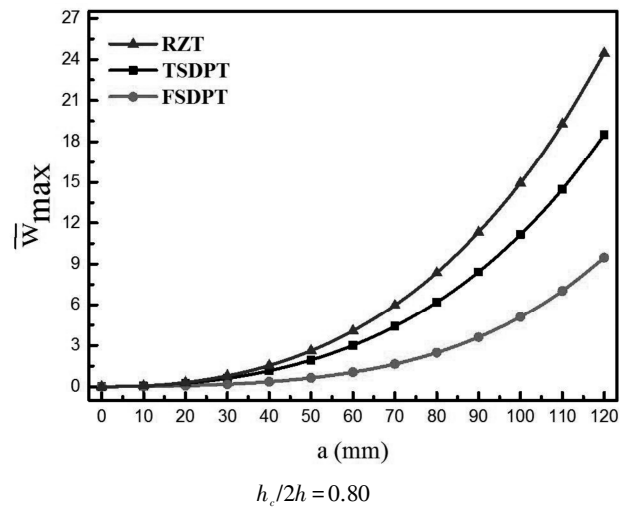
将式代入平衡方程中解线性方程组得到未知系数  $\{U, V, W, \Theta_x, \Theta_y, \psi_x, \psi_y\}$ , 从而获得夹芯板完整位移表达式。

## 5.1 蜂窝夹芯板弯曲挠度计算

当蜂窝芯子高度保持不变, 基于 RZT、高阶剪切变形板理论 (TSDPT) 和一阶剪切变形板理论 (FSDPT) 得到的蜂窝夹芯板中心处最大无量纲弯曲挠度随方板长度变化如图 3 所示。图中, 横坐标为方板长度  $a$ , 纵坐标为最大无量纲弯曲挠度  $\bar{w}_{\max}$ 。蜂窝芯子高度  $h_c$  取值为  $20\text{mm}$ 。为了消除夹芯板几何尺寸改变对弯曲挠度产生的影响, 与板几何尺寸无关的挠度无量纲形式采用如下:

$$\bar{w}_{\max} = \frac{w(a/2, b/2) E_c}{100 q_0 2h} \tag{30}$$

由图 3 可知, 基于三种不同板理论得到的最大无量纲弯曲挠度随板长度的增加逐渐变大, 且基于本文模型得到的挠度值均小于 TSDPT 与 FSDPT 给出的结果。当蜂窝夹芯板边长取值较小, 基于不同板理论得到的无量纲挠度值基本一致。随着板的变薄, 基于 RZT 得到的结果明显小于一阶剪切板理论, 略小于高阶剪切板理论。此外, 随着夹芯板芯子高度比例的增加, 本文模型所预测到板的刚度逐渐接近于 TSDPT 给出的结果。当夹芯厚度比例  $h_c/2h = 0.95$  时, 两种板理论结果基



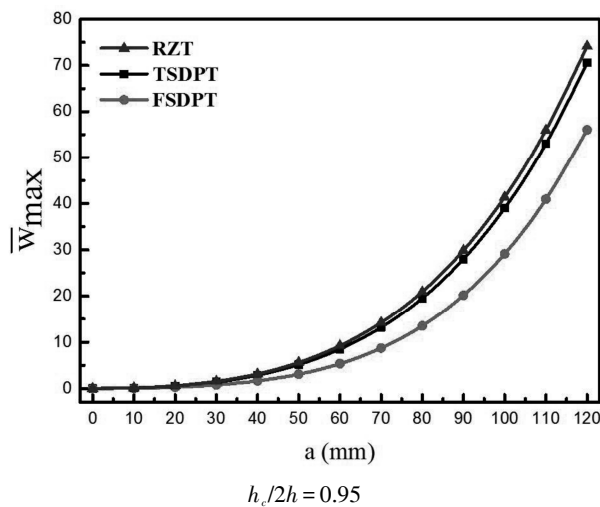


图3 基于三种不同板理论得到蜂窝夹芯板中心处最大无量纲弯曲挠度

### 5.2 蜂窝夹芯板静力弯曲行为中的高度效应

蜂窝芯子高度取不同值时,基于不同蜂窝等效方法获得的板中心处最大无量纲弯曲挠度对比如表1所示,算例中函数项数  $N$  取值为3。

表1 蜂窝高度取不同值时,蜂窝夹芯方板中心处最大无量纲弯曲挠度  $\bar{w}_{max}$

$a/2h$	$h_c$	$h_c/2h = 0.8$	0.9		0.95		Gibson & Fu
			H-model	Gibson & Fu	H-model	Gibson & Fu	
10	0.01	27.0946	27.5347	34.8598	41.6773	47.8042	64.1259
	5	27.2678		35.1361		48.4144	
	10	27.3716		35.2619		48.6241	
	15	27.4181		35.3144		48.7045	
	20	27.4417		35.3405		48.7429	
	25	27.4555		35.3553		48.7641	
	30	27.4643		35.3646		48.7771	
	35	27.4702		35.3708		48.7856	
20	0.01	216.698	218.166	320.720	393.194	517.151	720.159
	5	217.379		322.575		523.147	
	10	217.683		323.162		524.731	
	15	217.811		323.383		525.283	
	20	217.874		323.488		525.537	
	25	217.910		323.546		525.674	
	30	217.933		323.582		525.755	
	35	217.949		323.605		525.808	

由表1可知:基于解析均匀化模型得到的板中心处最大无

量纲弯曲挠度  $\bar{w}_{max}$  先随蜂窝高度的增加增长较为明显;随着蜂窝高度的持续增加,  $\bar{w}_{max}$  增长逐渐放缓并最终收敛到某一特定值。由于板中心处最大弯曲挠度经无量纲处理后不受蜂窝高度几何改变影响,因而表1中数据可以体现出由蜂窝高度改变引起的蜂窝芯子等效模量变化对夹芯板整体刚度产生的影响,即捕捉到蜂窝夹芯板静力弯曲行为中蜂窝芯子的高度效应。同时,通过对比表1中不同板跨厚比,蜂窝芯子高度比例下的  $\bar{w}_{max}$  发现,高度效应在  $a/2h$  较大,即板较薄时以及  $h_c/2h$  较大时较为明显;随着板的增厚或蜂窝芯子高度比例的下降,高度效应逐渐减弱。此外,通过与基于传统蜂窝等效方法(Gibson&Fu)得到的结果对比发现,当芯子高度比例较小时,基于Gibson&Fu等效方法得到的  $\bar{w}_{max}$  与基于解析均匀化模型结果基本一致;随着  $h_c/2h$  的增加,基于不同等效模型得到弯曲挠度结果差异逐渐增大。当  $h_c/2h = 0.95$  时,传统蜂窝等效方法相对于解析均匀化方法较严重低估了蜂窝芯子的等效刚度,其最大无量纲弯曲挠度  $\bar{w}_{max}$  相对误差分别为 31.6% ( $a/2h = 10$ ) 和 37.2% ( $a/2h = 20$ )。

## 6 结语

本文基于精化锯齿层合板理论建立了蜂窝夹芯板的静力弯曲模型。模型借助于解析均匀化方法获取了双壁厚六边形蜂窝芯子的等效力学参数,并因引入该方法而能够反映由蜂窝高度改变引起的蜂窝芯子等效模量变化对弯曲挠度产生的影响。基于虚功原理推导了平衡方程和边界条件,并以受双向正弦载荷作用的四边简支板为例预测了蜂窝夹芯板的弯曲挠度并探究了其高度效应。主要结论可概括为:

(1)当夹芯板跨厚比较小,即板较厚时,基于本文模型所预测的板弯曲刚度与一阶剪切板理论(FSDPT)与高阶剪切板理论(TSDPT)给出的结果基本一致。随着板的变薄,基于RZT得到的结果明显小于一阶剪切板理论,略小于高阶剪切板理论。

(2)当蜂窝夹芯板跨厚比和芯层厚度比例取不同值时,不受几何因素影响的蜂窝夹芯板无量纲屈曲载荷首先随蜂窝高度的增加下降较为明显,即发现高度效应;随着蜂窝高度的继续增加,其值下降逐渐放缓并最终收敛到某一特定值,此后无量纲屈曲载荷不再随蜂窝高度的增加而发生变化,高度效应消失。蜂窝高度效应在板跨厚比、蜂窝芯层厚度比例取值较大时较为明显。随着蜂窝芯层厚度比例的下降或板的变厚,高度效应逐渐减弱直至消失。

### 参考文献

- [1]Gibson L J, Ashby M F. Cellular solids : structure and properties [M]. Cambridge University Press, 1997:487-488.
- [2]Gibson L J, Ashby M F. Cellular Solids: The mechanics of honeycombs[J]. 1997.

- [3]富明慧,尹久仁.蜂窝芯层的等效弹性参数[J].力学学报.1999,31(1):113-118.
- [4]邱旭,茅献彪.对边简支负泊松比蜂窝夹层板的弯曲自由振动[J].复合材料学报.2016,33(4):910-920.
- [5]李永强,金志强,王薇, et al.四边简支条件下对称蜂窝夹层板的弯曲振动分析[J].机械工程学报.2008,44(5):165-169.
- [6]付立英,王维扬.卫星用蜂窝夹层板的等效计算及实验研究[J].科学技术与工程.2008,8(23):6429-6432.
- [7]徐胜今,马兴瑞.正交异性蜂窝夹层板动,静力学问题的等效分析方法[J].复合材料学报.2000,17(3):92-95.
- [8]赵剑,谢宗蕙,安学峰, et al.蜂窝芯体材料面外等效弹性模量预测与分析[J].航空材料学报.2008,28(4):94-100.
- [9]Becker W. The in-plane stiffnesses of a honeycomb core including the thickness effect[J]. Archive of Applied Mechanics. 1998, 68(5): 334-341.
- [10]Li Y M, Hoang M P, Abbas B, et al. Analytical homogenization for stretch and bending of honeycomb sandwich plates with skin and height effects[J]. Composite Structures. 2015,120:406-416.
- [11]Li Y, Abbès F, Hoang M P, et al. Analytical Homogenization for in-Plane Shear, Torsion and Transverse Shear of Honeycomb core with Skin and Thickness Effects[J]. Composite Structures. 2016,140:453-462.
- [12]Tessler A, Sciuva M D, Gherlone M. A Refined Zigzag Beam Theory for Composite and Sandwich Beams[J]. Journal of Composite Materials. 2009,43(9):1051-1081.
- [13]Lurlaro L, Gherlone M, Sciuva M Di, et al. Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories[J]. Composite Structures. 2013.106(1):777-792.