 DOI: https://doi.org/10.12345/iptm.v3i4.16871

Discussion on the Application of Middle School Mathematical Models in Comprehensive Problems—Taking the "One-line and Three-class Angle Model" as an Example

Chunmei Zhao

Shanghai Xinguang School, Shanghai, 200000, China

Abstract

How to improve the students' ability to solve the final comprehensive problem? Of course, this can not be done overnight, need a long time to accumulate learning experience, the common mathematical basic geometric models in junior high school in the heart, and these models skilled application. The basic geometric model of junior high school is not much, but it is not clear in a few words. Now take the "one-line and three-class angle model" as an example, talk about the application of mathematical model in comprehensive problems, feel the help of mathematical modeling ideas to problem solving. Find a certain rule from mathematical modeling, obtain a new mode of inquiry learning, and make learning more interesting.

Keywords

junior high school mathematics; "one-line and three-class angle model"; comprehensive application

浅谈初中数学模型在综合题的应用——以“一线三等角模型”为例

赵春梅

上海市莘光学校，中国·上海 200000

摘　要

怎样提高学生的解压轴综合题能力呢？当然这不是一朝一夕就能做到的，需要长时间的日积月累的学习经验，把初中阶段常见的数学基本几何模型熟记于心，并将这些模型熟练应用。初中阶段的数学基本几何模型不算多，但要具体一一列举说明也不是三言两语讲清楚的。现以初三复习专题课“一线三等角模型”为例，谈谈数学模型在综合题中的应用，感受一下数学建模思想对解题的帮助。从数学建模中找到一定规律，获得新的一个探究学习模式，让学习变得更加有趣。

关键词

初中数学；“一线三等角模型”；综合应用

1 引言

初中数学到了初三的学习阶段才是能力的体现，数学的解题能力才是考察综合能力的体现。我们的一模、二模和中考中，这样的题往往就是 18 题、24 题、25 题的位置，在基本知识和基本能力已经解决的基础上，那么这三个题就是拉开差距的地方，想要初中数学获得高分，那么我们必须攻克这些难题。

这些题相对比较难，同学们要在有限时间里就能解出来，在平时的学习过程中必须多钻研、多思考、多总结，把常见的数学基本几何模型熟记于心，并将这些模型熟练应用，在解综合题时才会得心应手。

【作者简介】赵春梅（1980–），女，中国上海人，本科，中学一级教师，从事数学和应用数学研究。

论文以“一线三等角模型”为例，谈谈数学模型在综合题中的应用。

2 认识“一线三等角模型”

例题：如图 1 所示，在△ ABC 中，AB=AC，点 D 为边 BC 上的一个动点（点 D 不与点 B、点 C 重合），以点 D 为顶点作∠ EDF= ∠ B，射线 DE 交边 AB 于点 E，射线 DF 交边 AC 于点 F，找出图中的相似三角形并加以证明。

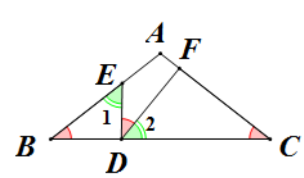

图 1

解法分析：根据三角形的外角定理得，∠ EDC= ∠ B+ ∠ 1，即 ∠ EDF+ ∠ 2= ∠ B+ ∠ 1，且 ∠ EDF= ∠ B，得到 ∠ 1= ∠ 2，从而得到△ EBD ∽△ DCF。

“一线”：在同一条直线 BC 上；“三等角”：以点 B、D、C 为顶点的 3 个等角，我们就可以用以上的方法很容易证相似。之所以能成为数学模型，那是因为在数学的综合题中，我们经常会见到它，经常应用，且非常好用。

2.1 “一线三等角”模型常见图形

如图 2 所示为同侧“一线三等角”模型；如图 3 所示为异侧“一线三等角”模型。

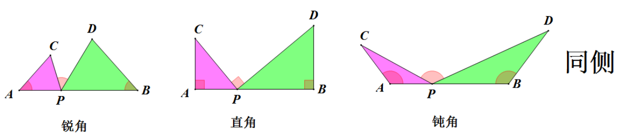

图 2

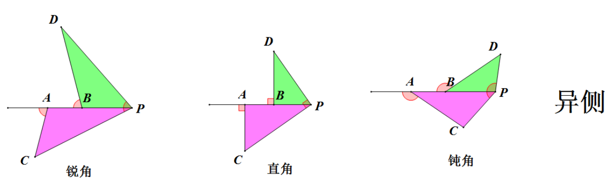

图 3

2.2 在等腰三角形中的“一线三等角模型”

如图 4 所示为等腰三角形。

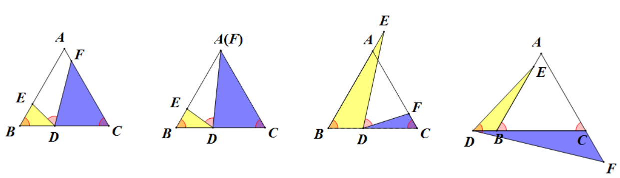

图 4

如图 5 所示，当 D 为 BC 边的中点时（BD=CD）时，联结 EF，由△ EBD ∽△ DCF 得到 $\frac{BE}{CD}=\frac{ED}{DF}$，因为 BD=CD，且更比得到$\begin{cases}\frac{BE}{ED}=\frac{BD}{DF}\\ \angle B=\angle EDF\end{cases}$ ⇒△ EBD ∽△ EDF，由此可见，当 D 为 BC 中点时，△ EBD ∽△ EDF ∽△ DCF。

2.3 在正方形中的“一线三等角模型”

同样地，当 EF//BC 时，或者 P 为 BC 中点时，也能得到△ EBP ∽△ PCF ∽△ FPE。具体如图 6 和图 7 所示。

这些常见的“一线三等角模型”在我们解题时，只要根据图形和条件的特征，就能很快地找到形似三角形，又由相似可以得到对应角相等，对应边成比例。那么在复杂图形中，利用“一线三等角模型”知道了固定的不变量和固定的数量关系，在有限的时间内，思维自然而然产生，难点有时也就自然而然破解了。

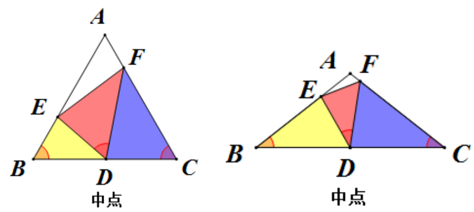

图 5

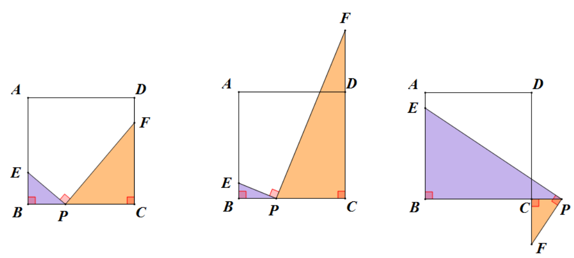

图 6

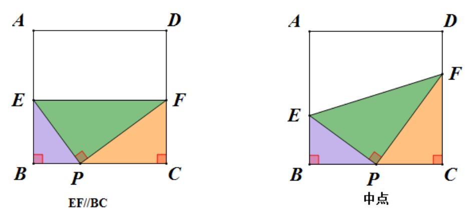

图 7

3 “一线三等角模型”在二次函数中的应用

在二次函数中往往会出现这样的问题，“在坐标轴求点 E 的坐标，使得 $BE\perp DE$”“在抛物线求点 F 的坐标，使得$\angle FBD=135°$（或者$\angle FBD=45°$）”“直角三角形存在性问题”等等，这些问题都不同，但都有两直线相互垂直的条件，又或者利用 45° 角构造等腰直角三角形的潜质 [1]。一般都是利用直角坐标系垂直的关系，构造“一线三直角模型”来解决问题，利用相似得到线段成比例和等角的三角比，建立等量关系，从而解决问题。

例题：（2019 普陀一模 24 题）如图 8 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx-3(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$和点 B，且 $OB=3OA$，与 y 轴交于点 C，此抛物线顶点为点 D。

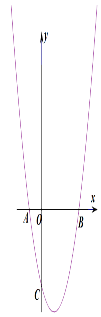

图 8

①求抛物线的表达式及点 D 的坐标。

②如果点 E 是 y 轴上的一点（点 E 与点 C 不重合），当 $BE \perp DE$ 时，求点 E 的坐标。

③如果点 F 是抛物线上的一点，且 $\angle FBD = 135°$，求点 F 的坐标。

论文针对解法分析展开一下讨论。

【第 1 小题】

由 $A(-1,0)$ 且 $OB = 3OA$，得到点 B 坐标 $(3,0)$，将 A、B 代入解析式得到 $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$，解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$，进一步通过配方法得到顶点坐标 $D(1,-4)$。

【第 2 小题】

如图 9 所示，在直角坐标系中，添加条件 $BE \perp DE$，这就是非常典型的“一线三直角模型”，过点 D 作 $DH \perp y$ 轴于点 H，得△ BOE ∽△ EHD，进一步得到 $\frac{BO}{EH} = \frac{OE}{HD}$，设点 E（0，n），则 $\frac{3}{n+4} = \frac{-n}{1}$，得 $n_1 = -3$(舍去)，$n_2 = -1$，点 E 的坐标为 $(0,-1)$。

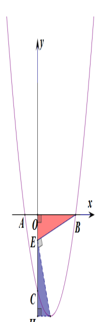

图 9

【第 3 小题】

如图 10 所示，给出条件 $\angle FBD = 135°$，也就是得到其邻补角为∠ DBQ=45°，二次函数 45° 角的问题，也就构造“一线三直角模型”的典型，利用 45° 角先构造等腰 Rt △ BDQ，再由直角顶点 D 引出“一线三直角”，可证 Rt △ BMD ≌ Rt △ DNQ，得到 BM=DN=2，MD=NQ=4，从而到点 Q（5，—6）；再由 B（1，3）、Q（5，—6），得到直线 BQ 为 $y = -3x + 9$，联立 $\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$，得点 F 坐标为（—4，21）。

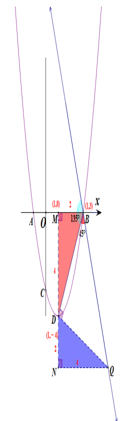

图 10

此题的第 2 题、第 3 小题就是典型的“一线三直角模型”的应用，只要熟练掌握，那么第 24 题也就变得非常容易。

4 “一线三等角模型”在几何证明中的应用

几何综合应用的第 25 题就是考查学生数学素养和综合能力的题目，还是有一定难度的，压轴题一般都是动点问题，结合“方程思想”“数形结合思想”“分类讨论思想”“建模思想”等来解决问题。学生要完全拿下，必须在平时的学习和练习中多钻研，多总结，对于各种数学模型要非常熟悉，才能在解压轴题时思维活跃，思路明确 [2]。

还是以“一线三等角模型”为例，看看数学模型解在综合题的作用。

例题：（2021 浦东一模 25 题）如图 11 所示，四边形 ABCD 是菱形，∠ B ≤ 90°，点 E 为边 BC 上一点，联结 AE，过点 E 作 EF ⊥ AE，EF 与边 CD 交于点 F，且 EC=3CF。

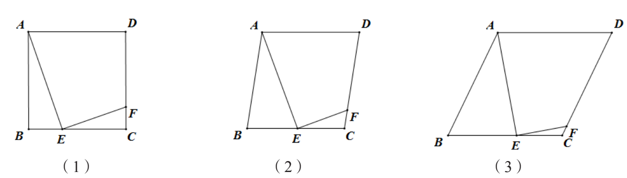

图 11

①如图 11（1）所示，当∠ B=90° 时，求 $S_{\triangle ABE}$ 与 $S_{\triangle ECF}$ 的比值。

②如图 11（2）所示，当点 E 是边 BC 的中点时，求 cosB 的值。

③如图 11（3）所示，联结 AF，当∠ AFE=∠ B 且 CF=2 时，求菱形的边长。

解法分析：

【第 1 小题】

如图 12 所示，菱形 +∠ B=90° 得到正方形 ABCD，

且 EF ⊥ AE，自然形成“一线三直角模型”，得到△ABE∽△ECF，由 EC=3CF，得 AB=3BE，进一步得到 AB ：EC=3 ：2，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方，即 $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ECF}}=\left(\frac{AB}{EC}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$。

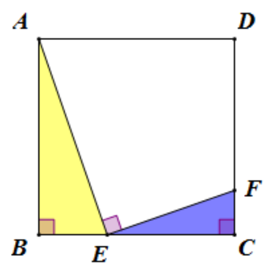

图 12

【第 2 小题】

如图 13 所示，由第 1 小题“一线三等角”的思路，我们可以构造“一线三等角模型”，分别过点 A 作 AG ⊥ BC 于点 G，过点 F 作 FH ⊥ BC，交 BC 延长线于点 H，由此得到△AGE∽△EHF 和△ABG∽△FCH。

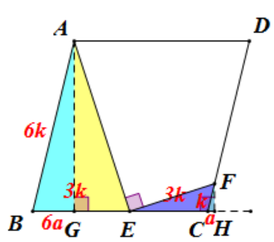

图 13

由 $\begin{cases}EC=3CF\\ E为BC中点\end{cases}\Rightarrow FC:BC=1:6$，设 FC=k，则 BC=AB=6k。

由△ABG∽△FCH $\Longrightarrow$ $\frac{FC}{AB}=\frac{CH}{BG}=\frac{1}{6}$，设 CH=a，则 BG=6a，在 Rt△ABG 中，由勾股定理得：$AG=6\sqrt{k^2-a^2}$。

在 Rt△FCH 中，由勾股定理得：$FH=\sqrt{k^2-a^2}$。

由△AGE∽△EHF $\Rightarrow$ $\frac{AG}{EH}=\frac{GE}{FH}$，即 $\frac{6\sqrt{k^2-a^2}}{3k+a}=\frac{3k-6a}{\sqrt{k^2-a^2}}$，化简得 $k=5a$。

在 Rt△ABG 中，$\cos B=\frac{6a}{6k}=\frac{a}{k}=\frac{1}{5}$。

【第 3 小题】

如图 14 所示，沿用第 1 小题、第 2 小题填线方法和解题思路，第 3 小题还是可以继续使用“一线三等角模型”来解决问题。本小题还增加了∠AFE=∠B 这个条件，继续第 2 小题设元的思想，可以利用等角的三角比来建立等量关系，最终求出菱形的边长。

由 EC=3CF 且 CF=2，得 EC=6。

在 Rt△FCH 中，由勾股定理得：$FH=\sqrt{4-a^2}$。

由△ABG∽△FCH $\Longrightarrow$ $\frac{FC}{AB}=\frac{CH}{BG}=\frac{FH}{AG}$，且 CF=2，设 $AB=2m, CH=a$，即 $\frac{2}{2m}=\frac{a}{BG}=\frac{\sqrt{4-a^2}}{AG}$，得 BG=am，$AG=m\sqrt{4-a^2}$。

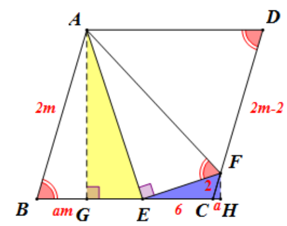

图 14

由△AGE∽△EHF $\Longrightarrow$ $\frac{AG}{EH}=\frac{GE}{FH}=\frac{AE}{EF}=\tan\angle AFE$，即 $\frac{m\sqrt{4-a^2}}{6+a}=\frac{2m-am-6}{\sqrt{4-a^2}}$，化简得 $a=\frac{4m-18}{2m+3}$。

在 Rt△ABG 中，$\tan B=\frac{AG}{BG}=\frac{m\sqrt{4-a^2}}{am}=\tan\angle AFE=\frac{m\sqrt{4-a^2}}{6+a}$，化简得 $a=\frac{6}{m-1}$。

从而得到 $\frac{4m-18}{2m+3}=\frac{6}{m-1}$，得 $m_1=0(舍去), m_2=\frac{17}{2}$，因此 $AB=2m=17$，即菱形边长为 17。

当然，这题第 2 小题、第 3 小题还有别的做法，这里选择一脉相承使用“一线三等角模型”来解决问题，目的想呈现出数学模型的魅力。只要根据题目图形和条件，选择合适的数学模型，要解出 25 题也是非常有可能的。

初中数学的综合能力题有时真的不简单，但数学模型确实给我们解题时给予解题思路，解题方法，解题技巧。我只是以“一线三直角模型”教学为例初步感受数学模型的魅力，而初中数学常见的基本几何模型还有“A 型或 X 型相似模型”“半角模型”“共边共角相似模型”“双高相似模型”“手拉手模型”等，这些都需要学生在平时的学习中注重积累，学会总结，勤于钻研 [3]。

从另一个角度来说，数学建模其实就是：思考—总结—应用。在类似的题目中找出他们的共同之处，探究其中是否有一定规律可循，通过实践和思考，钻研和总结，得到一定的规律，并在以后的解题中灵活应用。更难能可贵的是，这样的一个探究学习模式，这样的学习方法，何尝不是解决任何问题的一个思维模式呢？会让孩子们受益一生。

参考文献

[1] 邓君.识别并构造“一线三等角”模型[J].今日中学生,2024(3):14-17.

[2] 李荣.现象教学视角下几何模型教学的实践与思考——以“一线三等角”教学为例[J].初中数学教与学,2023(18):26-29.

[3] 曹喜荣.“一线三等角”问题的探究和拓展——以2022年中考数学安徽卷第14题为例[J].中学数学教学,2023(3):55-56.