 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v5i1.10035

Mathematical Abstract Core Literacy Improvement Strategy Based on Feature Construction—The Application of the Construction Method in Solving the Function Problem Serves as an Example

Biqian Wu

Shizuishan No.1 Middle School, Shizuishan, Ningxia, 753200, China

Abstract

The opinions of the Ministry of Education of the People's Republic of China on comprehensively deepening the curriculum reform and implementing the fundamental task of building morality and cultivating people clearly define the core literacy. How to achieve the goal of implementing the new curriculum standard and implement the task of core literacy is the established goal of every front-line mathematics teacher. As the first of the core literacy knowledge, mathematics abstraction is a hot issue in the research of mathematics education at present, starting from solving the problem of function synthesis, taking the construction method as an example, this paper analyzes how to implement mathematical abstraction, from the concept of function to mathematical application, through to mathematical practice, and explains the specific methods with vivid examples.

Keywords

core literacy; mathematics abstract; problem solving; constructivism

基于特征构造的数学抽象核心素养提升策略——构造法在解决函数问题中的应用为例

吴必潜

石嘴山市第一中学，中国·宁夏 石嘴山 753200

摘　要

中华人民共和国教育部全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见中明确界定了核心素养，如何实现落实新课标目标，将核心素养的任务落到实处是每一个一线数学教师既定目标，而数学抽象作为核心素养知识之首，是目前数学教育研究的热点问题，论文从解决函数综合问题出发，以构造法为例，分析如何落实数学抽象，从函数的概念出发，到数学应用，贯穿至数学实践，以生动的实例阐释具体做法。

关键词

核心素养；数学抽象；问题解决；建构主义

1 引言

数学抽象作为数学核心素养第一项，其重要意义不言而喻，高中数学贯穿逻辑思维能力，尤其新高一学生，刚进入高一，对于知识的掌握停留在初中数学的基础上，简单地认为多做练习就能熟练地掌握，特别是函数的学习，函数的定义到函数的性质以及基本初等函数的学习，停留在运算的层面，对于知识的把控不能从核心掌握，导致大多数学生认为高中数学极其难以掌握，特别是数学抽象的掌握更是蜻蜓点水[1]。

从一节高三数学的公开课我们发现，对于抽象函数的理解甚至是概念性的错误，如抽象函数的定义域，值域，很多老师抽象函数理解为数学抽象，更是贻笑大方，数学抽象没有具体的定义，有点像模糊数学的概念，它的外延比较模糊，但是内涵非常清楚，在石嘴山市高中数学优质课比赛中，有两位教师分别从两个角度引入对数的概念，课堂效果非常好，学生明白引入对数的概念就是为解决实际问题而生。数学的精髓是用严密合理的逻辑思维思考问题，并根据实际做出契合实际的行动方案[2]。

【课题项目】本课题基于宁夏回族自治区教育厅第六届基础教育课题，课题名称为《信息技术下的高中数学抽象核心素养教材分析与教学研究》（课题编号：JXKT-HL-06-026）。

【作者简介】吴必潜（1986-），男，中国宁夏石嘴山人，硕士，一级教师，从事中学数学教育研究。

2 通过比较大小构造函数证明不等式

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x$，求证：当 $x>-1$ 时，恒有 $1-\frac{1}{x+1}\le\ln(x+1)\le x$。

解题分析：本题是证明不等式，通过构造两个函数，分别从函数的最值出发，从其导数入手即可证明。

解：步骤一：$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$

$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 上为增函数，

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为减函数，

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

于是函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(x)_{\max}=f(0)=0$，因此，当 $x>-1$ 时，$f(x)\le f(0)=0$，即 $\ln(x+1)-x\le 0$ $\therefore$ $\ln(x+1)\le x$（右面得证）。

步骤二：令 $g(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

即 $g(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 上为减函数，在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数，

故函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的最小值为 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x>-1$ 时，$g(x)\ge g(0)=0$，即 $\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\ge 0$

$\therefore$ $\ln(x+1)\ge 1-\frac{1}{x+1}$，综上可知，当 $x>-1$ 时，有 $\frac{1}{x+1}-1\le\ln(x+1)\le x$。

解题反思：通过移项法构造函数旨在解决比较大小的问题，没有函数的变形，只是构造函数，体现的是不等式比较大小的两种方法之一，其使用优势在于所构造的函数导数恰好能解决问题，无论是对构造的数学做一阶导还是二阶导，导数有最值。

3 通过题目特征换元构造函数证明不等式

换元法是指引入一个或几个新的变量代替原来的某些变量，通过引入新的元素将分散的条件加以整合，其理论根据是等量变换。

证明：对任意的正整数 t，不等式 $\ln(\frac{1}{t}+1)>\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}$ 都成立。

解题分析：从所证结构出发，只需令 $\frac{1}{t}=x$，则问题转化为：当 $x>0$ 时，恒有 $\ln(x+1)>x^2-x^3$ 成立，现构造函数 $h(x)=x^3-x^2+\ln(x+1)$，求导即可达到证明。

解：令 $h(x)=x^3-x^2+\ln(x+1)$，则 $h'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{x+1}=\frac{3x^3+(x-1)^2}{x+1}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒正，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x\in(0,+\infty)$ 时，恒有 $h(x)>h(0)=0$，

即 $x^3-x^2+\ln(x+1)>0$，$\therefore \ln(x+1)>x^2-x^3$

对任意正整数 t，取 $x=\frac{1}{t}\in(0,+\infty)$，则有 $\ln(\frac{1}{t}+1)>\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}$。

解题反思：

反思 1：我们知道，当 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，则 $x>a$ 时，有 $F(x)>F(a)$。如果 $f(a)=\varphi(a)$，要证明当 $x>a$ 时，$f(x)>\varphi(x)$，那么，只要令 $F(x)=f(x)-\varphi(x)$，就可以利用 $F(x)$ 的单调增性来推导. 也就是说，在 $F(x)$ 可导的前提下，只要证明 $F'(x)>0$ 即可。

反思 2：换元法注重等价换元，在构造函数的同时，注重定义域的等价性。

4 从结构特征构造函数证明

若函数 $y=f(x)$ 在 R 上可导且满足不等式 $xf'(x)>-f(x)$ 恒成立，且常数 a，b 满足 $a>b$，求证：a $f(a)$ >b $f(b)$。

解：由已知 $xf'(x)+f(x)>0$ $\therefore$ 构造函数 $F(x)=xf(x)$，

则 $F'(x)=xf'(x)+f(x)>0$，从而 $F(x)$ 在 R 上为增函数。

$\because a>b$ $\therefore F(a)>F(b)$ 即 $af(a)>bf(b)$。

解题反思：

反思 1：由条件移项后 $xf'(x)+f(x)$，容易想到是一个积的导数，从而可以构造函数 $F(x)=xf(x)$，求导即可完成证明。

反思 2：若题目中的条件改为 $xf'(x)>f(x)$，则移项后 $xf'(x)-f(x)$，要想到是一个商的导数的分子。

5 构造主元解决函数

设不等式 $mx^2-2x-m+1<0$ 对满足 $|m|\le 2$ 的一切 m 都成立，求 x 的取值范围。

解题分析：可以将原不等式化为 $(x^2-1)m<2x-1$ ①，采用分离变量法，视 x 为主元，通过讨论 x^2-1 的符号来求解。

解：（1）当 $x^2-1=0$ 即 $x=\pm1$ 时，①成立 $\Leftrightarrow$ $2x-1>0$，$\therefore$ $x=1$；

（2）当 $x^2-1>0$ 即 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，由①式得 $m<\frac{2x-1}{x^2-1}$，

由题意知 $\dfrac{2x-1}{x^2-1}$ ＞ 2，由此得不等式组 $\begin{cases} x^2-1>0 \\ \dfrac{2x-1}{x^2-1}>2 \end{cases}$，

解得 1 ＜ x ＜ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$；

（3）当 x^2-1 ＜ 0 即 -1 ＜ x ＜ 1 时，由①得 m ＞ $\dfrac{2x-1}{x^2-1}$，

由题意知 $\dfrac{2x-1}{x^2-1}$ ＜ -2，由此得不等式组 $\begin{cases} x^2-1>0 \\ \dfrac{2x-1}{x^2-1}\le -2 \end{cases}$，

解得 $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$ ＜ x ＜ 1；

综上可知：$\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$ ＜ x ＜ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$。

解题分析：视 m 为主元，将原不等式看成关于 m 的不等式，进而将不等式的左边看成关于 m 的函数，利用函数的性质解题.

解答 2：设 $f(m)=(x^2-1)m+1-2x$，

则｜m｜≤2 时，恒有 f（m）＜ 0，

$\therefore \begin{cases} f(2)=2x^2-2x-1<0 \\ f(-2)=-2x^2-2x+3<0 \end{cases}$，解得 $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$。

解题反思：第二种解法实现了“变换主元”思路，从解题过程来看，视 m 为主元比视 x 为主元要简便得多. 解决问题常常出现正难则反，一个命题，原命题不好解决，我们考虑逆否命题，变换主元实现换位思考，问题就解决起来容易多了。

6 构造二阶导数函数证明导数的单调性

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$. 证明：$(x-1)f(x)\ge 0$。

证法：令 $F(x)=(x-1)f(x)$，要证明 $F(x)\ge 0$，只需证 $F(x)_{min}\ge 0$。

因 F（x）$=f(x)+(x-1)f'(x)$ $=(x+1)\ln x-x+1+(x-1)(\ln x+\dfrac{1}{x})$

$=2x\ln x-(x+\dfrac{1}{x})+2$，显然当 $x=1$ 时，$F'(x)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$x+\dfrac{1}{x}>2,\ln x<0,F'(x)<0$，$F(x)$ 在（0,1）递减；

当 $x>1$ 时，$x+\dfrac{1}{x}>2$，，$F'(x)$ 的符号仍不能判定，求二阶导数得

$[F'(x)]'=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}>0$，从而 $F'(x)$ 在 $x>1$ 时递增，

$F'(x)>F'(1)=0$，$F(x)$ 在 [1,+ ∞) 递增，所以当 $x=1$ 时，$F(x)_{\min}=F(1)=0$，

故 $F(x)\ge 0$ 成立，原不等式成立。

解题反思：当函数取最大（或最小）值时不等式都成立，可得该不等式恒成立，从而把不等式的恒成立问题可转化为求函数最值问题. 不等式恒成立问题可以转化为 $0>f(x)$（或 $0<f(x)$）恒成立，，从而把不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题. 因此，利用导数求函数最值是解决不等式恒成立问题的一种重要方法 [3]。

将数学教学与落实核心素养紧密地联系到一起，是新课改的重点，通过构造法解决函数问题，有以下几点收获：

①概念教学。在数学概念教学中，无论是数学定义或者数学命题形成中，注重联系现实模型，让数学概念的形成不再是数学家定义的，而是自然的，科学的。注重刻画概念的本质，注重概念联系实际应用，实现概念来自于现实服务于现实。

②数学应用。在数学应用教学中，2019 年高考数学全国卷 2 选择题考察了数学应用，这道题变成了许多同学的拦路虎，很多同学把这个题当成物理题，对其进行天体物理题来解决，发现进入了死循环，最后无法求解 [4]。

2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就，实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系。为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 L_2 点的轨道运行。L_2 点是平衡点，位于地月连线的延长线上. 设地球质量为 M_1，月球质量为 M_2，地月距离为 R，L_2 点到月球的距离为 r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r 满足方程：

$$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}$$

设 $\alpha=\dfrac{r}{R}$，由于 a 的值很小，因此在近似计算中 $\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则 r 的近似值为

A. $\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$　　B. $\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$

C. $\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{M_1}}R$　　D. $\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

解析：$\because \dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$，$r=R\alpha,\therefore \dfrac{M_1}{(R+R\alpha)^2}+\dfrac{M_2}{(R\alpha)^2}=(R+R\alpha)\dfrac{M_1}{R^3}$

$\therefore M_2=M_1\cdot\left(1+\alpha-\frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)\alpha^2=M_1\cdot\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx M_1\cdot 3\alpha^3=3M_1\cdot\frac{r^3}{R^3}$,

$\therefore M_2=M_1\cdot\left(1+\alpha-\frac{1}{(1+\alpha)^2}\right)\alpha^2=M_1\cdot\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx M_1\cdot 3\alpha^3=3M_1\cdot\frac{r^3}{R^3}$,

$\therefore r^3\approx\frac{M_2}{3M_1}R^3,\therefore r\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$,选$D$

$\therefore r^3 \approx \frac{M_2}{3M_1}R^3, \therefore r \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$,选$D$

通过本题的解题过程，我们发现体现的就是根据题目的已知条件进行解题分析，从我们熟悉的天体物理出发，精心设计问题情景，核心是实现数学应用，培养学生用数学头脑去想问题，增强学生用数学知识解决实际问题的意识[5]。

7 结语

在实践教学中，不能通过数量的优势替代解题反思，合理的进行变式教学可以起到举一反三的效果，培养学生的发散思维，借助于变式设问、变位思考、命题变换等引导学生学会归纳和类比，做到方法归纳，题目归类，有效地克服学生思维的肤浅性、盲目性和狭隘性等，而且能开拓解题思路，培养探索意识，引导学生从不同途径寻求解决问题的方法 . 通过多问 , 多思 , 多用等激发学生思维的积极性和深刻性。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.高考考试大纲(2017版)[S].2016.

[2] 王华明,侯斌.丛一堂概念课的不同导入谈数学史融入数学教学[J].数学通报,2014(8):2.

[3] 胡典顺.数学素养研究综述[J].课程.教材.教法,2010(12):50-54.

[4] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[M].北京:人民教育出版社,2003.

[5] 马云鹏.关于数学核心素养的几个问题[J].课程.教材.教法,2015(9):4.