 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v5i2.10322

Research on the Teaching Method of Matrix Eigenvalues Based on the Three-angle Methodology

Ling Wang

School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan, 621000, China

Abstract

Based on the methodology of three perspectives, this paper discusses the teaching method of matrix eigenvalue. From the perspective of comparison, transformation and distribution of eigenvalues and eigenvectors of matrix, a method of understanding and learning mathematical concepts is proposed and applied to the whole process of linear algebra teaching.

Keywords

three perspectives; matrix eigenvalues; singular value decomposition; teaching methods

基于三视角方法论的矩阵特征值的教学方法初探

王玲

西南科技大学 理学院，中国・四川 绵阳 621000

摘　要

基于三视角的方法论，对矩阵特征值的教学方法进行探讨。从矩阵的特征值与特征向量的对比视角、变化视角、分布视角出发，提出一种认识和学习数学概念的方法，并应用于线性代数课程教学的全过程。

关键词

三视角；矩阵特征值；奇异值分解；教学方法

1 引言

三视角方法论是一种新的认识方法论或认识工具。三元符号学被广泛应用于各个学科，它们在各领域得到一定的应用和发展。20 世纪初皮尔士提出三元符号学，符号意义分为三种：第一种叫做“直观意义”，它只是符号引起的一种感觉，而不是真正的反应，皮尔士把这种意义看作语义的潜能；第二种叫做“动态意义”，指的是符号在解释活动中对个别解释者所产生的直接作用，它因人、因地、因时而易；第三种叫做“终极意义”，它与符号使用者的习惯或规则有关，是通过慎重考虑而被确认为某一符号之真实意义 [1-2]。1948 年，美国语言学家派克提出每一种语言都可以看成一种单位，认为可以用对比、变体和分布的方法来分析这个单位，后来他又提出语言单位可以从粒子、波、场三个方面进行考察 [3]。1985 年，美国心理学家斯腾伯格提出“智力三元论”，智力的内在成分、成分与经验的关系、成分的外部作用这三个方面构成了智力成分的亚理论、智力情境亚理论和智力经验亚理论 [4-5]。20 世纪 80 年代，美国教育家杜宾斯基提出的 APOS 理论是以建构主义为基础的数学学习理论，它的核心是引导学生在具体的数学活动中学习数学知识、分析数学问题，从而建构自己的数学概念和数学思想 [6]。2017 年王德生在总结前人经验的基础上提出三视角的方法论，认为万事万物都是由对比、变化、分布三个视角组成。对比视角是事物不同于其他事物的特征，变化视角是事物具体的变化特征，分布视角是事物特征与其他事物特征的相互作用和影响 [7]。

作者将用三视角的方法论讨论矩阵的特征值与特征向量的学习方法和教学设计，提出了一种学习新的数学概念的方法，并应用于线性代数的课程教学中。

2 三视角方法论

如果把数学看作是一种符号语言，那么我们可以用多视角的系统来探讨数学符号是如何表达意思的。通过研究如何高效率地使用多视角系统来提高数学学习和数学教学的效率，这也是数学教育研究的热点之一，对给定的一个数学概念或数学过程，可以用不同的符号表示，如用代数符号、几何符号、具体实物、具体实验、虚拟仿真等。不

【课题项目】西南科技大学教育教学改革与研究项目（项目编号：19xn0038）。

【作者简介】王玲（1979–），女，硕士，讲师，从事代数数论研究。

同的符号表示对学生会产生不同的学习效果，三视角方法论告诉我们认识任何事物都可以从对比、变化和分布的三个视角去认识和分析事物，并且不能缺少其中任何一个视角。

所谓对比视角，就是一个事物区别于其他事物的本质特征，而这种对比的特性本身也是多视角的，如我们要认识矩阵的特征值和特征向量，首先需要给出矩阵的特征值和特征向量的定义，而这个定义就是它与其他概念的差别和对比，这个定义不但具有高度概括性，还要具有一般普遍性。在这里，对比视角的作用能帮助我们对比和区分概念，如果没有对比视角的认识，我们就不知道我们认识的事物到底是什么。

所谓变化视角是指具有这一本质特性的事物，变化性是通过一些具体的例子表现出来的。例如，我给出了矩阵的特征值和特征向量的定义（对比视角），而它的本质特性又有各种各样的具体表现形式，如特征值的性质、特征向量的性质以及矩阵的相似对角化和奇异值分解等。而所有的这些变化性，包括了它延伸出来的性质、定理、结论、举例，它们本质上都是从定义生发出来的。因此，在数学的学习和教学过程中，特别注重概念的区分和推演，只有这样才能在变化视角中去完成推导和演绎。

任何一个概念，它都是统一性和多样性的结合体，有时也叫做概念的内涵和外延，也就是这个概念的对比视角和变化视角。这两个视角是认识一个概念的密不可分的最基础部分，我们既不能离开定义就来讨论各种性质和结论，也不能离开性质和结论来认识一个定义。所以，让学生理解定义（对比视角）与性质（变化视角）之间的这种关系，可以实现对概念的融会贯通，达到意想不到的学习效果。现行的许多教材从代数上详细论证和归纳了特征值与特征向量的性质和结论，也有少数教材在几何意义上对特征值与特征向量的意义进行了论述，它们都对特征值与特征向量的变化视角进行了详细阐述。

分布视角是指该事物与处境里其他事物的联系和影响，任何一个事物，它都处在各种不同的处境里，总是会给处境里的其他事物带来一定影响。例如，我们将矩阵特征值的理论应用到其他学科和领域，就会找到与其他事物的关系和影响，不但能解决实际问题，还能反过来研究矩阵特征值的对比和变化视角。作者将用矩阵特征值分解得更一般的形式——奇异值分解来讨论矩阵特征值的一个分布视角。

3 教学方法与实践

3.1 三视角分析

不管是从学习方法出发，还是从教学方法入手，我们都是从不同的视角去认识矩阵的特征值与特征向量。而这个多视角的内容，它包含了我们已有的知识基础、认知范围、价值观念等。我们认识和了解任何事物、现象以及规律，都可以从对比的视角、变化的视角和分布的视角去进行。我们学习和研究矩阵的特征值与特征向量，也可以从对比、变化、分布视角去深入分析它。矩阵特征值的对比视角是它的定义，也是矩阵特征值区别于其他概念的本质特征；矩阵特征值的变化视角是它的性质、定理以及它的外延概念等。它们都是由定义演化出来的，而从定义到性质、定理的证明过程就是对比视角到变化视角的演绎过程；矩阵特征值的分布视角就是它的应用，就是它在各个学科和领域的关系和影响。下面就用三视角的方法来学习和讨论矩阵的特征值与特征向量，见图 1。

图 1 矩阵特征值三视角

3.2 特征值与特征向量的对比和变化视角

定义 1[8]：设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的一个 n 阶矩阵，如果数 λ 和非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足关系式：

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

成立，那么数 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，非零向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量。

这里式(1)也可写成 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，这是有 n 个未知数、n 个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零，即：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0 \tag{2}$$

这是以 λ 为未知数的一元 n 次方程，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程。行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，即：

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| \tag{3}$$

它是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的关于 λ 的 n 次多项式，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵。

显然特征方程（2）的根就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。特征方程在复数域内有且仅有 n 个根（重根按重数计算），而在实数域内不一定有根，因此特征根的个数不仅与 $\boldsymbol{A}$ 有关，与数域 $\boldsymbol{P}$ 也有关。

性质 1：设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有：

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(\boldsymbol{A})$

性质 2：设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有：λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵时，λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值。

性质 3：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 依次是与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

性质 4：设 λ_1 和 λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 和 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_t$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_t$ 线性无关。

定义 2[8]：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果有可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相

似。对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵。

定义 3[8]：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果有相似变换矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，则称为把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化。

定理 1[8]：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

定理 2[8]：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵。将实对称矩阵相似对角化，就称为实对称矩阵的特征值分解。

定义 4[9]：设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的 $m\times n$ 矩阵，则存在一个分解，使得：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{*} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{U}$ 是 $m\times m$ 阶酉矩阵；$\boldsymbol{S}$ 是 $m\times n$ 阶对角矩阵；$\boldsymbol{V}^{*}$ 是 $n\times n$ 阶酉矩阵。这样的分解就称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解（SVD）。矩阵 $\boldsymbol{S}$ 对角线上的元素 s_{ii} 即为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，用 Matlab 进行 SVD 分解得到的奇异值由大到小排列。如此，矩阵 $\boldsymbol{S}$ 便能由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行奇异值分解，于是 $\boldsymbol{A}$ 可以分成若干个秩一矩阵（秩为 1 的矩阵）之和：

$$\boldsymbol{A}=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T+\cdots+\boldsymbol{\sigma}_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^T \tag{5}$$

其中，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，$r\le\min\{m,n\}$，$\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$（$i=1,2,\cdots,r$）分别表示 m 维奇异向量和 n 维奇异向量 [10]。

3.3 特征值与特征向量的分布视角

奇异值分解（SVD）是一种非常重要的矩阵分解理论，广泛应用于信号处理、图像压缩、统计学等领域。由于特征值分解只适用于特定类型的方阵，而奇异值分解能够用于任意类型矩阵的分解，因此奇异值分解的适用范围更广 [11]。但是奇异值分解在一般的《高等代数》和《线性代数》教材中却很少被提及，下面作者将从分布视角出发，以案例的形式深入探讨矩阵的奇异值分解在图像处理中的应用。

数字图像可以看作是包含非负实数的矩阵。图像就是一个矩阵，矩阵的大小就是图像像素的大小。假设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 进行 SVD 分解得：

$$\boldsymbol{A}=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T+\cdots+\boldsymbol{\sigma}_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^T$$

其中，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，$r\le\min\{m,n\}$，$\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$（$i=1,2,\cdots,r$）分别表示 m 维奇异向量和 n 维奇异向量。

我们用 Matlab 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行 SVD 分解，满足 $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r>0$。这里由于奇异值按从大到小的顺序排列，我们尝试着只保留较大的奇异值，舍去较小的奇异值，恢复后的图像会是什么情形呢？如果只保留第 1 个奇异值 σ_1，即只保留式（5）右边第 1 项，令 $\boldsymbol{A}_1=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T$，恢复的图像如图 2 所示，图像模糊不清，完全看不清楚图像轮廓；我们试着多增加几项，取式（5）右边的前 5 项，保留前 5 个奇异值：

$$\boldsymbol{A}_5=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T+\sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T+\sigma_3\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{v}_3^T+\sigma_4\boldsymbol{u}_4\boldsymbol{v}_4^T+\sigma_5\boldsymbol{u}_5\boldsymbol{v}_5^T$$

恢复后的图像如图 3 所示，隐约可以辨别图像的轮廓了，但还是很模糊；如果保留前 20 个奇异值：

$$\boldsymbol{A}_{20}=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T+\sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T+\cdots+\sigma_{20}\boldsymbol{u}_{20}\boldsymbol{v}_{20}^T$$

恢复后的图像如图 4 所示，虽然图像还有些模糊，但已经能辨别出这是 Lana 的脸了；如果保留前 50 个奇异值：

$$\boldsymbol{A}_{50}=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T+\sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T+\cdots+\sigma_{50}\boldsymbol{u}_{50}\boldsymbol{v}_{50}^T$$


原图

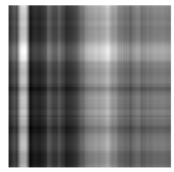
图2 恢复第1个奇异值


图3 恢复前5个奇异值


图4 恢复前20个奇异值


图5 恢复前50个奇异值


图6 恢复前200个奇异值

恢复后的图像如图 5 所示，它已经和原图非常接近了；如果保留前 200 个奇异值，恢复后的图像如图 6 所示，在视觉上已经与原图没有差距了。

通过实验，我们从特征值的分布视角进行讨论分析，对图像的矩阵进行 SVD 分解和图像恢复，使得线性代数的教学内容变得生动有趣。但还有许多问题需要留给学生去进一步挖掘和发现。例如，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行 SVD 分解得到的奇异值到底代表了什么？$m\times m$ 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和 $n\times n$ 酉矩阵 $\boldsymbol{V}^{*}$ 的实际意义是什么？SVD 分解在线性空间中的几何意义是什么等。这里奇异值一般是比较稳定的，不容易受到其他值的影响，用 SVD 分解对图像进行处理，奇异值通常指图像的亮度，奇异向量构成的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}^{*}$ 代表图像的几何纹理特征。矩阵的奇异值分解在图像处理这一处境中有其非常重要的意义。对比视角、变化视角是着重于数学概念自身，而分布视角则是着重于与其他事物的关系，一个概念它的分布视角往往是非常丰富的，奇异值分解也被广泛应用于信号处理、统计分析等领域。

4 结语

线性代数的是一门应用性很强，但又在理论上进行了高度抽象的数学学科。每一个数学概念的提出，都是在各个学科和各个领域应用的高度概括。对比视角、变化视角是着重于数学概念自身，而分布视角则是着重于与其他事物的关系，也就是应用在分布视角里，我们必须要同时使用对比视角和变化视角，所以这三个视角必须同时使用。通过三视角的方法论，我们认识到一个数学概念的分布视角往往是非常丰富的，在数学的学习和教学过程中，想要更深入地了解一个事物或概念，必须从它的对比、变化和分布视角来进行学

习和分析，从而形成多元化的学习方法和教学方法。将三视角的方法论融入到教学内容设计和教学方法中，并将线性代数的理论部分和科学外延巧妙结合起来，改变学生认为线性代数就是一门抽象、枯燥的基础课程的表面认识，使学生真正掌握线性代数的理论和方法，激发学生热爱科学、积极进行科学探索和科学创新的意识和兴趣。

参考文献

[1] [美]皮尔士(Peirce,C.S)皮尔士论符号[M].徐鹏译.上海:上海译文出版社出版,2016.

[2] 诺特.符号学手册[M].卢布明顿:印第安纳大学出版社,1990.

[3] Davis P W. Linguistics: Linguistic Concepts: An Introduction to Tagmemics. Kenneth L.Pike[J]. American Anthropologist,2010,86(3):753-754.

[4] 刘志宏,魏华忠.斯腾伯格的成功智力理论及其启示[J].中国教育学刊,2002(6):50-52.

[5] 刘卓雄.Sternberg的三元智力理论及其对数学教学的启示[J].数学教育学报,1997,6(3):39-44.

[6] 张伟平.基于APOS理论的数学概念教学探究[J].数学通讯,2006(15):1-4.

[7] 王德生.认识世界从多到三视角[EB/OL].http://blog.sina.com.cn/s/blog_790b610b0102wko0.html,2021-03-21.

[8] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].3版.北京:高等教育出版社,2003.

[9] 陈建龙,张小向.矩阵分解与广义逆矩阵[J].大学数学,2020(5):57-66.

[10] 施劲松,刘剑平.矩阵特征值、特征向量的确定[J]大学数学,2003,19(6):123-126.

[11] 王宏兴,霍玉洪.奇异值分解的教与学[J].淮南师范学院学报,2015(3):125-127.