Unitary Representation of a Class of Quantum Random Wandering in l2 (Z,H) and l2(Z H)

Yin Zhang　Zhongzhi Zhang　Hongmei Liu

Chengdu Geely College Boya College, Chengdu, Sichuan, 641402, China

Abstract

This paper presents a quantum random wandering model directly constructed by quantum Bernoulli noise, and studies its fundamental properties, and finally gives a unitary representation of the quantum random wandering states in the square integrable functional space l2(Z,H), and the tensor space l2(Z H).

Keywords

quantum random wandering; tensor space; unitary representation

一类量子随机游荡在 l2（Z,H）及 l2（Z H）中的酉表示

张银　张忠志　刘洪梅

成都市吉利学院博雅学院，中国·四川 成都 641402

摘　要

论文提出了一种由量子Bernoulli噪声直接构造的量子随机游荡模型，并研究了它的基本性质，最后给出了量子随机游荡的态在平方可积泛函空间l2（Z,H），以及张量空间l2（Z H）中的酉表示。

关键词

量子随机游荡；张量空间；酉表示

1 引言

20 世纪 90 年代初，随着量子信息理论的研究热潮，量子随机游荡（quantum random walk）成为一种新的游荡模式，这种新的模式开始被人们所关注，它在量子信息理论和量子计算等领域中有着广泛的应用。量子随机游荡简称为量子游荡，是基于量子力学原理的一种随机游荡，可将其看作经典随机游荡的量子类似物，由于量子随机游荡的演化速度远远快于经典的随机游荡，因此，它们的演化行为与经典的随机游荡有着极大的不同。

2011 年，王才士等在根据 Privault 的 Malliavin 型随机分析框架，定义了增生和湮灭两种算子，并证明了这两种算子满足等时典则反交换关系，最后利用这两种算子给出了量子 Bernoulli 噪声的定义。2016 年，量子 Bernoulli 噪声首次被王才士等 [1] 用在了量子随机游荡的研究当中，文献 [1] 利用量子 Bernoulli 噪声构建了一种量子随机游荡模型，这种模型是定义在一维整数格上的具有无穷多个内部自由度的离散时间量子随机游荡模型，可归于酉量子随机游荡的范畴。文献 [1] 引入了 QBN 的时间演化模式，并讨论了该模型的性质，即在某些特殊的初始状态下，其演化方式与经典随机游荡模型具有相同的极限概率分布。

论文利用 Bernoulli 泛函空间上的算子 ϑ_k 和 ϑ_k^*，提出了一种由量子 Bernoulli 噪声直接构造的量子随机游荡模型。我们研究了它的基本性质，并得到了该模型在空间 $l^2(\mathbb{Z},H)$ 和张量空间 $l^2(\mathbb{Z})\otimes H$ 中的两种酉表示。

论文组织结构如下。第一部分，主要介绍一些基本概念和理论。第二部分，定义了 $l^2(\mathbb{Z},H)$ 上的自伴的酉算子 w_n，并结合平方可积泛函空间 H 上的两类有界算子 ϑ_k 和 ϑ_k^*，构建了量子随机游荡的时间演化模型，给出了量子随机游荡的态在 $l^2(\mathbb{Z},H)$ 和张量空间 $l^2(\mathbb{Z})\otimes H$ 中的酉表示。

2 预备知识

概念和记号在论文中设 $\mathbb{C}$ 表示复数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{N}$ 表示非负整数集。若 $z\in\mathbb{C}$，$\Re_z$ 和 $\aleph_z$ 分别它的实部和虚部。约定 Hilbert 空间上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一变量共轭线性，关于第二变量线性。若 T 是 Hilbert 空间上的算子，T^* 表示它的共轭算子，$DomT$ 和 $RanT$ 分别表示 T 的定义域和值域。$\mathbb{N}$ 表示非负整数集，即 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$。

设 $\Omega=\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 表示所有映射 $\omega:\mathbb{N}\mapsto\{-1,1\}$ 构成的集合。以

【作者简介】张银（1994–），女，中国甘肃清水人，硕士，助教，从事概率论与数理统计、随机分析研究。

$(\varsigma_n)_{n\geq 0}$ 表示定义在 Ω 上的典则投影序列，即对每个 $n\geq 0$，投影 ς_n 由 $\varsigma_n(\omega)=\omega(n)$，$\omega\in\Omega$ 来定义 [1]。

令 $\Im=\sigma(\varsigma_n;\ n\geq 0)$，即 $\Im$ 表示 Ω 上由序列 $(\varsigma_n)_{n\geq 0}$ 生成的 σ - 域。设 $(p_n)_{n\geq 0}$ 是给定的正数序列，这里 $0<p_n<1, n\geq 0$。由文献 [1] 可知，$\Im$ 上存在唯一的概率测度 P，可表示为：

$$P\circ(\zeta_{n1},\zeta_{n2},\dots\zeta_{nk})^{-1}\{(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\dots,\ \varepsilon_k)\}=\prod_{j=1}^{k}p_j^{\frac{1+\varepsilon_j}{2}}(1-p_j)^{\frac{1-\varepsilon_j}{2}}$$

其中 $k, n_j\in\mathbb{N}$，$\varepsilon_j\in\{-1,1\}$ $(1\leq j\leq k)$，当 $i\neq j$ 时，$n_i\neq n_j$，因此，就能得到一个概率测度空间 $(\Omega,\Im,P)$，此概率测度空间 $(\Omega,\Im,P)$ 称为 Bernoulli 空间。

利用序列 $(\varsigma_n)_{n\geq 0}$ 可定义 $(\Omega,\Im,P)$ 上的随机变量序列：$Z_n=\dfrac{\zeta_n+q_n-p_n}{2\sqrt{q_n p_n}}$，$n\geq 0$，这里 $q_n=1-p_n$。可见，$Z=(Z_n)_{n\geq 0}$ 是 $(\Omega,\Im,P)$ 上的一列独立的随机变量序列，Z_n 有如下的概率分布：$P\{Z_n=\theta_n\}=p_n$，$P\{Z_n=-1/\theta_n\}=q_n$，$n\geq 0$，$\theta_n=\sqrt{q_n/p_n}$。

因此，$Z=(Z_n)_{n\geq 0}$ 可看作离散时间的 Bernoulli 噪声。并且，我们还可以证明 $\Im=\sigma(Z_n;n\geq 0)$ 是由 Bernoulli 噪声 $(Z_n)_{n\geq 0}$ 生成的 σ - 域。因此，我们把 Bernoulli 空间 $(\Omega,\Im,P)$ 上的随机变量也叫作 Bernoulli 噪声的泛函，简称 Bernoulli 泛函。为了简便，用 $\Im_n=\sigma(Z_k;\ 0\leq k\leq n)$ 表示 Ω 上由 $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$ 生成的 σ - 域，其中 $n\geq 0$，且 $\Im_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$。

以下，我们用 $H=L^2(\Omega,\Im,P)$ 表示 $Z=(Z_n)_{n\geq 0}$ 的平方可积泛函空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积和范数，并规定内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第二个变量线性，关于第一个变量共轭线性，$B(H)$ 表示利用 H 上的有界线性算子构成的 Banach 代数。由文献 [1] 可知，Z 具有混沌表示性质，因此，$\{Z_\sigma\mid\sigma\in\Gamma\}$ 是 H 中的一个标准正交基，其中 $Z_\varnothing=1$，$Z_\sigma=\prod_{i\in\sigma}Z_i$，$\sigma\in\Gamma$，$\sigma\neq\varnothing$，由此可见，$H$ 是一个无穷维复可分的 Hilbert 空间。

3 主要结果及证明

在这一部分，我们将给出量子随机游荡模型，考察其性质，并根据其性质，给出量子随机游荡的态在 $l^2(Z,H)$ 中的酉表示，接着利用 $l^2(Z,H)$ 与 $l^2(Z)\otimes H$ 的桥梁，给出量子随机游荡的态在张量空间 $l^2(Z)\otimes H$ 中的酉表示 [2]。

引理 3.1[1]：对任意 $k\in N$，在 H 上存在一个有界算子 ϑ_k，使得：

$$\vartheta_k Z_\sigma=1_\sigma(k)Z_{\sigma\setminus k},\ \sigma\in\Gamma,$$

其中 $\sigma\setminus k=\sigma\setminus\{k\}$，$1_\sigma(k)$ 表示 σ 上的示性函数，且 $\|\vartheta_k\|=1$，称 ϑ_k 为湮灭算子。

引理 3.2[1]：对任意 $k\in N$，则 ϑ_k 的伴随算子 ϑ_k^* 有如下表示：

$$\vartheta_k^* Z_\sigma=[1-1_\sigma(k)]Z_{\sigma\cup k},\ \sigma\in\Gamma,$$

其中 $\sigma\cup k=\sigma\cup\{k\}$，且 $\|\vartheta_k^*\|=1$，称 ϑ_k^* 为增生算子。

定义 3.3：湮灭算子和增生算子序列 $\{\vartheta_k,\vartheta_k^*\}_{k\geq 0}$ 称为量子 Bernoulli 噪声，简记为 QBN。

引理 3.4[1]：设 $k,l\geq 0$，则 $\vartheta_k\vartheta_l=\vartheta_l\vartheta_k$，$\vartheta_k^*\vartheta_l^*=\vartheta_l^*\vartheta_k^*$，$\vartheta_k^*\vartheta_l=\vartheta_l\vartheta_k^*$ $(k\neq l)$，且

$$\vartheta_k\vartheta_k=\vartheta_k^*\vartheta_k^*=0,\ \ \vartheta_k\vartheta_k^*+\vartheta_k^*\vartheta_k=I$$

这里 I 表示 H 中的单位算子。

设 $l^2(Z,H)$ 表示定义在 Z 上取值于 H 的平方可积泛函空间，记作：

$$l^2(Z,H)=\{\Phi:Z\to H\mid\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|\Phi(x)\|^2<\infty\},$$

因此 $l^2(Z,H)$ 为复希尔伯特空间，其内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(Z,H)}$ 可表示为：

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_{l^2(Z,H)}=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\langle\Phi(x)\ \Psi(x)\rangle,\Phi,\Psi\in l^2(Z,H),$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示前面所提到的内积。自然地，我们可以定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(Z,H)}$ 上的范数 $\|\cdot\|_{l^2(Z,H)}$。

引理 3.5[1]：设量子随机游荡的初始态 $\Phi_0\in l^2(Z,H)$ 满足：$\Phi_0(x)\in H_{n-1}$，$x\in\mathbb{Z}$，其态序列 $(\Phi_n)_{n\geq 0}$ 具有如下性质：$\{\Phi_n(x)\mid x\in\mathbb{Z}\}\subset H_{n-1}$，$n\geq 1$，$H_{n-1}$ 是前一段所定义的子空间。

定理 3.6：设 $n\geq 0$，且 $\Phi\in l^2(Z,H)$。若泛函 $\Psi:Z\to H$ 满足下列条件

$$\Psi(x)=\vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1),\quad x\in Z$$

则 $\Psi\in l^2(Z,H)$，且 $\|\Psi\|_{l^2(Z,H)}=\|\Phi\|_{l^2(Z,H)}$。

证明：根据 $\vartheta_n\vartheta_n=\vartheta_n^*\vartheta_n^*=0$ 和 $\vartheta_n\vartheta_n^*+\vartheta_n^*\vartheta_n=I$，就有

$$\begin{aligned}\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|\Psi\|^2&=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\langle\vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1),\ \vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1)\rangle\\&=\sum_{x=-\infty}^{\infty}[\langle\Phi(x+1),\vartheta_n^*\vartheta_n\Phi(x+1)\rangle+\langle\Phi(x-1)\quad\vartheta_n\vartheta_n^*\Phi(x-1)\rangle]\\&=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\langle\Phi(x),\vartheta_n^*\vartheta_n\Phi(x)\rangle+\sum_{x=-\infty}^{\infty}\langle\Phi(x),\vartheta_n\vartheta_n^*\Phi(x)\rangle\\&=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\langle\Phi(x),(\vartheta_n^*\vartheta_n+\vartheta_n\vartheta)\Phi(x)\rangle\\&=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\|\Phi\|^2\end{aligned}$$

由于 $\Phi\in l^2(Z,H)$，则根据引理 3.5，可知 $\Psi\in l^2(Z,H)$，且 $\|\Psi\|_{l^2(Z,H)}=\|\Phi\|_{l^2(Z,H)}$。

定理 3.7：设 $n\geq 0$，则存在自伴的酉算子 $w_n:l^2(Z,H)\to l^2(Z,H)$ 使得

$$[w_n\Phi](x)=\vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1)$$

证明：由于 $\Phi\in l^2(Z,H)$，根据定理 3.6，可定义泛函 $\Psi_\Phi:Z\to H$ 如下：

$$\Psi_\Phi(x)=\vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1),\ x\in Z,$$

这里 $\Psi_\Phi\in l^2(Z,H)$，且 $\|\Psi_\Phi\|_{l^2(Z,H)}=\|\Phi\|_{l^2(Z,H)}$。

定义等距算子 $w_n:l^2(Z,H)\to l^2(Z,H)$ 如下：$w_n\Phi=\Psi_\Phi$，$\Phi\in l^2(Z,H)$，即：

$$[w_n\Phi](x)=\vartheta_n\Phi(x+1)+\vartheta_n^*\Phi(x-1),$$

设 $\Phi\in l^2(Z,H)$，$\sigma\in\Gamma$，定义 $\Phi^\sigma\in l^2(Z,H)$ 如下：$\Phi^\sigma(y)=\begin{cases}Z_\sigma,\ y=x\\0,\ \ y\neq x, y\in Z,\end{cases}$

则有

$$\begin{aligned}\langle [w_n^*\Phi](x), Z_\sigma\rangle &= \langle w_n^*\Phi, \Phi^\sigma\rangle_{l^2(Z,H)}\\ &= \langle \Phi, w_n\Phi^\sigma\rangle_{l^2(Z,H)}\\ &= \langle \Phi(x-1), \vartheta_n Z_\sigma\rangle + \langle \Phi(x+1), \vartheta_n^* Z_\sigma\rangle\\ &= \langle \vartheta_n^*\Phi(x-1)+\vartheta_n\Phi(x+1), Z_\sigma\rangle,\end{aligned}$$

因此，$w_n^* = w_n$。由于 w_n 是等距算子，因此，我们只需要证明 $w_n w_n^* = I$。

设 $\Phi\in l^2(Z,H)$，且 $\Psi = w_n^*\Phi$，设 $\forall x\in Z$，则有

$$\begin{aligned}[w_n\Psi](x) &= \vartheta_n\Psi(x+1)+\vartheta_n^*\Psi(x-1)\\ &= \vartheta_n\vartheta_n^*\Phi(x)+\vartheta_n^*\vartheta_n\Phi(x)\\ &= \Phi(x)\end{aligned}$$

由 $w_n\Psi=\Phi$，结合 $\Psi = w_n^*\Phi$，就有 $w_n w_n^* = I$，因此，w_n 是自伴的酉算子。

定义 3.8：设 $l^2(Z,H)$ 表示整数格 $\mathbb{Z}$ 上的离散时间量子随机游荡模型的态空间，其态由 $l^2(Z,H)$ 中的标准正交基线性表示，其时间演化满足方程为：

$$\Phi_{n+1}(x) = \vartheta_n^*\Phi(x-1)+\vartheta_n\Phi(x+1),\quad x\in\mathbb{Z}, n\ge 0$$

其中，Φ_n 表示该量子随机游荡在 n 时刻态，$n\ge 0$，特别地，Φ_0 表示初始态。

易知 $l^2(Z,H)\cong l^2(Z)\otimes H$，这里 $l^2(Z)$ 表示量子游荡的位置空间，而 H 表示量子随机游荡的内部自由度空间，且 H 为无限维的希尔伯特空间。

定理 3.9：量子随机游荡有下列的酉表示：

$$\Phi_n = (\prod_{k=0}^{n-1} w_k)\Phi_0,\ n\ge 1$$

其中 $w_k: l^2(Z,H)\to l^2(Z,H)$ 是定理 3.7 中的算子。

证明：结合定理 3.7 与定义 3.8，就有

$$\Phi_n = w_{n-1}\Phi_{n-1} = (\prod_{k=0}^{n-1} w_k)\Phi_0,\ n\ge 1$$

接下来，我们将给出算子 $w_n\in l^2(Z,H)$ 及量子随机游荡的态在张量空间 $l^2(Z)\otimes H$ 中的酉表示。

定义 3.10：设 $f\in l^2(\mathrm{Z})$，$\xi\in H$，定义 $\Phi_{f,\xi}:\mathrm{Z}\to H$ 如下：$\Phi_{f,\xi}(x) = f(x)\xi,\ x\in\mathrm{Z}$，易知 $\{\Phi_{f,\xi}\,|\, f\in l^2(\mathrm{Z}),\xi\in H\}$ 在 $l^2(Z,H)$ 中是完备的。

定义 3.11：在 $J: l^2(Z,H)\to l^2(Z)\otimes H$ 上存在酉线性等距映射：

$$J\Phi_{f,\xi} = f\otimes\xi,\ f\in l^2(\mathrm{Z})\quad \xi\in H$$

由定义 3.11 可知，存在 $J^{-1}: l^2(Z)\otimes H\to l^2(Z,H)$，使得：

$$J^{-1}(f\otimes\xi) = \Phi_{f,\xi},\ f\in l^2(\mathrm{Z})\quad \xi\in H$$

定义 3.11 建立起了 $l^2(Z,H)$ 到 $l^2(Z)\otimes H$ 的“桥梁”。接下来，将利用定义 3.11 中的算子 J 讨论酉自伴酉算子在张量空间 $l^2(Z)\otimes H$ 中的表示。

引理 3.12：在 $\tau: l^2(\mathrm{Z})\to l^2(\mathrm{Z})$ 上定义算子如下：

$$[\tau f](x) = f(x-1),\ x\in\mathrm{Z},\ f\in l^2(\mathrm{Z})$$

则 τ 是酉算子，且 $\tau = \sum_{x\in\mathrm{Z}} |\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|$，这里 $\{\delta_x\,|\,x\in\mathrm{Z}\}$ 是 $l^2(\mathrm{Z})$ 上的标准正交基。

定理 3.13：对于任意的 $n\ge 0$，存在 $l^2(Z)\otimes H$ 上的酉算子 T_n，使得

$$T_n = \sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_n + |\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_n^*]$$

且 T_n 是自伴算子。

证明，对于任意的 $f\otimes\xi\in l^2(Z)\otimes H$，根据定义 3.11，有 $J^{-1}(f\otimes\xi) = \Phi_{f,\xi}$，则

$$\begin{aligned}w_n\Phi_{f,\xi}(x) &= \vartheta_n\Phi_{f,\xi}(x+1)+\vartheta_n^*\Phi_{f,\xi}(x-1)\\ &= \vartheta_n f(x+1)\xi+\vartheta_n^* f(x-1)\xi\\ &= [(\tau^{-1}f)(x)]\vartheta_n\xi+[(\tau f)(x)]\vartheta_n^*\xi\\ &= [\Phi_{\tau^{-1}f,\vartheta_n\xi}+\Phi_{\tau f,\vartheta_n^*\xi}](x)\end{aligned}$$

因此，$w_n\Phi_{f,\xi} = \Phi_{\tau^{-1}f,\vartheta_n\xi}+\Phi_{\tau f,\vartheta_n^*\xi}$，又根据定义 3.11，则 T_n 可表示为

$$\begin{aligned}T_n(f\otimes\xi) &= Jw_nJ^{-1}(f\otimes\xi)\\ &= Jw_n\Phi_{f,\xi}\\ &= J(\Phi_{\tau^{-1}f,\vartheta_n\xi}+\Phi_{\tau f,\vartheta_n^*\xi})\\ &= \tau^{-1}f\otimes\vartheta_n\xi+\tau f\otimes\vartheta_n^*\xi\\ &= (\tau^{-1}\otimes\vartheta_n)(f\otimes\xi)+(\tau\otimes\vartheta_n^*)(f\otimes\xi)\\ &= (\tau^{-1}\otimes\vartheta_n+\tau\otimes\vartheta_n^*)(f\otimes\xi)\\ &= \sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_n+|\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_n^*](f\otimes\xi)\end{aligned}$$

即 $T_n = \sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_n+|\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_n^*]$。

以上这个定理表明，$l^2(Z,H)$ 中的算子 w_n 在张量空间 $l^2(Z)\otimes H$ 中可表示为 $T_n = \sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_n+|\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_n^*]$。

定理 3.14：量子随机游荡在 $n\ge 0$ 时刻的态在张量空间 $l^2(Z)\otimes H$ 中有如下的酉表示：

$$F_n = (\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_k+|\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_k^*])F_0,\ n\ge 1$$

其中，$F_n\in l^2(Z)\otimes H$，F_0 为量子随机游荡在张量空间中的初始态[3]。

证明：由于 $F_n\in l^2(Z)\otimes H$，定义 $F_{n+1} = T_nF_n,\ n\ge 0$，则有

$$\begin{aligned}F_n &= (\prod_{k=0}^{n-1}T_k)F_0\\ &= (\prod_{k=0}^{n-1}\sum_{x\in\mathrm{Z}}[|\delta_x\rangle\langle\delta_{x-1}|\otimes\vartheta_k+|\delta_x\rangle\langle\delta_{x+1}|\otimes\vartheta_k^*])F_0\end{aligned}$$

其中，T_k 是定理 3.13 中的酉算子。

参考文献

[1] WANG Caishi, YE Xiaojuan. Quantum walk in terms of quantum Bernoulli noises, Quantum Inf[J]. Process,2016(5):1897-1908.

[2] ZHANG Yin, WANG Caishi, SHI Jia. A unitary quantum walk constructed directly from quantum bernoulli noises[J]. International Journal of Engineering and Applied Sciences(IJEAS),2019,6(9):57-60.

[3] 张银.量子Bernoulli噪声环境下的一类量子随机游荡[D].兰州:西北师范大学,2020.