

# Research and Application of Mathematics Core Literacy Evaluation Based on the Perspective of Test Paper Evaluation

Qianqian Wang Shengguo Li Haitao Bai

Huanggang Normal University, Huanggang, Hubei, 438000, China

## Abstract

This paper refers to the division standard of mathematics core literacy in the curriculum standards, and explores the related issues of mathematics core literacy evaluation from the perspective of test paper evaluation. In view of the differences between test papers and textbook exercises, core mathematics literacy is divided into four levels: the understanding of mathematical concepts, the mastery of mathematical properties and theorems, the transfer of mathematical knowledge, and the comprehensive application of mathematical knowledge. Based on the four levels mentioned above, drawing on the PISA2021 model and UbD theory, a framework for evaluating mathematical core literacy based on the perspective of test paper evaluation is established. Finally, select the specific test questions in the college entrance examination paper, analyze the investigation of the core mathematics literacy of the relevant test questions, and demonstrate the operability of the framework.

## Keywords

test paper evaluation; core literacy of mathematics; evaluation framework

# 基于试卷测评视角的数学核心素养评价研究及应用

王倩倩 李圣国 白海涛

黄冈师范学院, 中国·湖北 黄冈 438000

## 摘要

论文参考课程标准中数学核心素养的划分标准,从试卷测评的角度出发,探究数学核心素养评价的相关问题。鉴于试卷测试题与教材练习题之间存在的差异,数学核心素养被划分为数学概念的理解、数学性质与定理的掌握、数学知识的迁移和数学知识的综合运用四个水平。基于上述提出的四个水平,借鉴PISA2021模型和UbD理论,建立了一个基于试卷测评视角的数学核心素养评价框架。最后,选取高考试卷中具体试题,分析了有关试题的数学核心素养的考察情况,展示了框架的可操作性。

## 关键词

试卷测评; 数学核心素养; 评价框架

## 1 引言

关于试卷命题的研究,内容方面有的涉及专题分析,有的关注整体一致性分析,研究方法方面既有定性分析,又有定量分析。试卷的核心素养测评方面,大多是以喻平从知识学习角度构建的核心素养评价框架为基础,或做了修改或进行了细分。建立的核心素养评价框架,有的借助PISA模型,有的利用韦伯分析模式,还有的选用“SEC”分析

模型,没有统一的试卷测评框架模式。论文借助《课程标准》、PISA2021模型、UbD理论从试卷角度构建数学核心素养评价框架,为研究数学试卷关于核心素养的考查情况提供参考。

## 2 理论基础

### 2.1 《普通高中课程标准(2017版)》

《课程标准》将学生学业成就表现从低到高划分为三个水平。水平一要求学生能够简单地了解或体会数学专业性的概念、性质和原理,并且能简单解释。水平二要求学生在水平一的基础上对数学问题有自己的思路并可独立解决问题。水平三要求学生能够在综合的情境中或者在实际的情境中把握数学的本质。

【课题项目】黄冈师范学院2020年教育硕士案例项目“基于现实情境的课堂教学”。

【作者简介】王倩倩(1999-),女,中国河南禹州人,硕士,从事数学试卷研究。

《课程标准》中学业质量水平划分既涉及核心素养方面提出的要求,又包括学生数学专业知识的学习要求,同时涵盖数学“四基”和“十大核心概念”的培养要求,以及数学思想方法、数学文化的要求。

课程目标提出不仅要兼顾发展学生的数学核心素养,并且要将其渗透进学生学习与应用数学的过程中。在《课程标准》附录一中,每一个数学核心素养的培养目标都作了细分,核心素养主要依据“熟悉情境”“关联情境”“综合情境”以及行为动词(水平一“解释”“了解”,水平二“运用”“理解”,水平三“掌握”“探索”“构建”)划分为三个水平。每一个水平的划分包含很多方面,有数学语言表达能力、数学思想方法、数学应用能力、数学专业能力等,符合教学和学习知识的逻辑。

《课程标准》中核心素养的三水平划分非常的具体,在课堂教学上可操作性较强,可以指导教师制订教学设计,将核心素养与教学目标进行深度地融合,也可以指导教师在上课过程中对学生有意识地进行数学素养渗透,同时也便于教师在授课期间,通过观察学生课堂表现以及作业情况来判断学生的核心素养发展情况。

## 2.2 PISA2021 模型

PISA(Program for International Student Assessment)模型,是经济合作与发展组织(OECD)发起的大型国际学生评价项目。主要评价对象是世界范围内15周岁(临近义务教育末期)的学生,旨在衡量各个国家及地区数学核心素养的发展。OECD每九年为一个周期对测评框架进行修订,现在PISA模型采用的是PISA2003修订两次后的PISA2021模型。PISA2021数学框架基于个人、职业、社会、科学四种具体情景,将数学内容分为空间和图形、变化和关系、不确定性和数据以及数量四部分,并介绍“21世纪技能”,分别是批判性思维、创新、研究与探究、自我导向、主动和坚毅、信息使用、系统思维、交流、反思<sup>[1]</sup>。

PISA2021把学生的数学核心素养作为测评的主要内容,将数学内容融入到具体的情景之中,测试的重心是学生解决真实问题的能力,主要在于考查学生是否能够面对21世纪乃至未来生活的挑战。PISA2021模型更关注情景本身的真实性,贴近学生的生活实际。它不再将数学作为解决情景问题时所需要用到的工具,而是让学生在真实情境中能够体会数学所起到的作用。

## 2.3 UbD 理论

Grant Wiggins 和 Jay McTighe 在 Understanding by Design 一书中提出了逆向教学设计,即“追求理解的教学设计方案”,简称 UbD。UbD 理论生成了一套自己的课程设计,实施与评价体系,它对“理解”的含义进行了深入的

探究,并与易混淆的“知道”做了详细区分,如表1所示。

表1 知道与理解的区分

知道	理解
事实	事实的意义
大量相关事实	提供事实关联的意义和理论
可证实的主张	不可靠的、行程中的理论
对或错	有关程度或复杂性
知道一些正确的事情	理解为什么它是知识、什么使它成为知识
根据所知回应提示	能够判断何时使用以及何时不用所知的内容

理解意味着以正确的方式完成任务,通常反映了人们有能力解释为什么特定的技巧、方法或知识主体在特定情境下是合适或不合适的。而知道专注的都是一系列必须“用心习得”的事实、技巧和过程。正如布鲁纳所说,理解是“超越信息本身”,如果我们能够通过理解一些关键的想法和策略来学习,就可以创造新的知识并达到更深入的理解。

UbD 理论区分了理解的不同侧面,形成了理解六侧面,做到所有的侧面就是真正的理解。

侧面1——能解释;以一个合理的理论揭示事物的内涵,搞清楚那些令人困惑的、孤立的或含糊的现象、数据、情感或者观点的含义。

侧面2——能阐明;演绎、解说和转述,从而提供某种意义。

侧面3——能应用;在新的、不同的、现实的情境中有效地使用知识。

侧面4——能洞察;批判性的、富有洞见的观点。

侧面5——能神入;感受到别人的情感和世界观的能力,神入是洞察的一种形式。

侧面6——能自知;要求自觉地质疑自己看待世界的方式。

UbD 理论中的评价主要用于教师判断是否达成规划的教学目标,评价工具为评价量表。评价量表的制定分为三步:第一步确定课堂学习目标,第二步选择一种评价方式,第三步制定评价量表。评价量表主要分为表现性任务的评价以及习题的检测评价。可以看出,UbD 的评价方式主要适用于课堂教学结束后的评价。

## 3 从试卷角度构建评价框架

教师教学需包含对学生数学核心素养的渗透,试卷是检验其教学质量的重要手段。然而学生学习课本知识与试卷测评的知识有着很大的不同,课本知识分单元和专题,单元测试具有专题性,只针对某一知识版块。试卷测评首先时间固定,题量固定,所考察的知识更加全面也更具有综合性,

一个题目考察一个或多个知识点,同时也会涉及到数学思想方法和数学核心素养等。因此如果要从试卷的角度对数学核心素养进行评价,那么对于评价水平的划分就不能简单地从知识学习的角度。参照《课程标准》中提出的学业质量及数学核心素养的水平划分、PISA2021模型以及UbD理论,论文从试卷考核的角度将数学核心素养,分为四种水平,即数学概念的理解、数学性质与定理的掌握、数学知识的迁移、数学知识的综合应用。

### 3.1 数学概念的理解

在UbD理论中,理解是专家经验中得出的重要推理,它表现为具体有用的概括,具有可迁移性,同时也包含抽象的、违反直觉的、容易被误解的概念<sup>[1]</sup>。学生接触新事物首先形成感性认识,即通过自身的感官操作认识到事物的表象,再经过一系列抽象的思维活动,才能够认识到事物的本质以及各个事物外部与内部的联系,此时才能称为形成了事物的概念。数学概念的理解是在概念形成后对概念的进一步深化,包括理解概念的内涵,掌握概念的外延,清楚有关概念间的逻辑联系。数学概念是学生学习数学,进行数学思维活动,搭建数学知识框架的基础。鉴于此,数学概念的理解被选为学生数学核心素养的一级水平,具体表现为:

①了解概念的实际背景,知道概念是如何产生的,能够完整准确地表述出数学概念的具体内容;

②理解概念的内涵外延,以及它们数学表达方式,能够区分相关概念,理解运算对象与法则;

③解决有关概念的基本问题,有基本的逻辑推理能力,能够使用简单的概念知识和基本方法解决数学问题。

### 3.2 数学性质与定理的掌握

数学的理论性基础知识一方面是数学概念,另一方面是数学性质与定理。数学概念是让学生掌握事物的本质,数学的性质和定理则是让学生知道如何运用数学概念解决数学问题,就是我们平时所说的方法论。数学的性质与定理是无数的科学家在数学历史的长河中不断地探索而沉淀下来的,是数学知识的精华也是智慧的结晶,具有较高的抽象性<sup>[1]</sup>。除此之外,数学的每一个性质和定理的推理论证过程,都源自数学家们的创造过程。学生学习数学性质和定理,就是经历一个再现的过程。它是前人已经发现,并验证总结出来的理论知识,而现在我们学习这个知识,就是再经历一次推理的过程最终得到同样的结论。

将数学性质与定理的掌握作为数学学科核心素养的二级水平,具体表现为:

①清晰地知道数学性质与定理的发展背景,能够自己

推理论证得到数学性质和定理;

②在简单的环境中能够判断这些性质与定理的使用条件,辨析各种性质、定理的异同,并形成独特的体系;

③能够运用性质和定理给出的方法解决较为容易的数学问题。

### 3.3 数学知识的迁移

在认知主义理论下,知识的迁移是指在学生的认知结构中已经被内化的知识对即将要学习的知识产生的影响,或者能够运用到不同的情境中解决问题。知识迁移在试卷评价框架中,主要体现在关注数学知识在不同情景中的应用,而不是相同情景下的模仿应用。首先,学习者应判断当前问题考核的知识点,也就是对要解决的问题归类。其次,判断当前情景可利用的条件,当这些条件与自己选择的方法产生冲突时,学习者能否灵活地转换方法。数学知识的迁移,通俗地说就是举一反三、触类旁通,它对学习者的数学能力有一定的要求,也更能够反映出学生数学核心素养的发展状况。

将知识迁移作为数学学科核心素养的三级水平,具体表现为:

①能够判断当前情景是否可以有效地进行知识迁移,有基本的逻辑思维能力,可以对问题进行简单的思维上的分析;

②掌握知识之间的逻辑结构,可以将知识迁移到不同的情境中并解决各种与数学相关的情景问题;

③具备基本的类比推理能力,能够运用多种方法解决涉及多种知识结合的常规性问题。

### 3.4 数学知识的综合运用

对学生数学能力的整体性考察在于对数学知识的综合性运用,包含数学技巧,数学知识,数学表达等方面。学生必须基础夯实,具备把所学的数学知识、数学方法融合在一个知识网络中的能力,并能将数学知识与多种数学思想方法融会贯通,灵活运用。因此,数学知识的综合运用对学生要求较高,也更能够检测出学生数学核心素养的水平。

将知识的综合运用作为数学核心素养的四级水平,具体表现为:

①学习者能够把所学的数学知识运用演绎推理、合情推理等方法解决复杂的问题;

②学习者掌握数学的思想方法,对复杂的问题能够在思维层面上灵活准确地应用;

③面对较为复杂的情境性问题,能够抓住问题的本质,借助多种辅助方法解决问题。

综上,从试卷的角度考察学生的数学核心素养,我们

建立起的评价框架如表2所示。

表2 数学学科核心素养评价框架

	数学概念的理解	数学性质与定理的掌握	数学知识的迁移	数学知识的综合运用
数学抽象				
逻辑推理				
数学建模				
数学运算				
直观想象				
数据分析				

表2的数学核心素养评价框架与《课程标准》中数学核心素养的三水平划分相比,《课程标准》是按照熟悉情境,关联情境,综合情境来划分这六大核心素养,该划分涵盖范围广,概括性强,适用于观察学生学习的过程性评价中。表2给出的核心素养框架,是从试卷角度来构造的,更适用于总结性评价。

PISA2021模型给出的框架,聚焦于数学问题的真实情境,

降低了纯数学方面的考察,把数学推理作为PISA测试的侧重点并明确列出了21世纪的八大技能。表2给出的框架,主要立足于中国的教育现状,面对的是中国目前数学课堂教学以及教学评价,更适用于中国本土试卷测评核心素养的评价。

UbD理论与中国提倡的理解教学不谋而合,表2提出的框架正是基于理解这一层面,数学概念和技能的掌握、数学知识的迁移、数学知识的综合运用都是理解的表现方式,只是对于数学知识理解的层次有所不同。

#### 4 案例分析

下面从数学概念的理解,数学性质和定理的掌握、数学知识的迁移、数学知识的综合运用简单分析中国高考试卷的核心素养考查情况。

试题1(2020年全国I卷理科):已知函数 $f(x) = e^x + ax^2$ 。

(1)当时 $a=1$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当时 $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 求 $a$ 的取值范围(具体分析见表3)。

试题2(2021年理科数学乙卷):已知抛物线 $C: x^2 = 2py(p > 0)$ 的焦点为 $F$ ,  $F$ 与圆 $M: x^2 + (y + 4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为4。

表3 试题一分析

	数学概念的理解	数学性质与定理的掌握	数学知识的迁移	数学知识的综合运用
逻辑推理	理解函数定义域与值域的关系;理解导函数的相关概念, $f'(x) > 0$ 代表 $f(x)$ 函数单调递增, $f'(x) < 0$ 代表 $f(x)$ 函数单调递减	通过题目中给出的条件求出导函数后,能够找到定义域,得到定义域内相应函数的大小关系并推理出函数的单调递增和递减	首先根据题目中的条件,转化问题得到 $g(x)$	运用逻辑推理和转化的思想找到 $g(x)$ ,并类比第一问进行分类讨论,再根据求出 $g(x)$ 的单调性和取值范围,求出 $a$ 的取值范围
数学运算	理解函数的定义域、值域等基本概念和原理;理解单调性的相关概念	掌握并运用函数的求导公式,以及运算法则	能够求出 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$ ,并找到 $g(x)$ 的情况讨论的关键点	讨论 $g(x)$ 的单调增减关系的同时,还要求出 $g(x) \leq 1$ 时 $a$ 的取值范围,并同时考虑分情况讨论中的取值

表4 试题二分析

	数学概念的理解	数学性质与定理的掌握	数学知识的迁移	数学知识的综合运用
逻辑推理	理解极坐标中抛物线和圆公式中字母的含义	能够从题目中给出的抛物线表达式得到焦点的坐标;能够从圆的表达式中得到圆心和半径	新的情境中运用极坐标的概念及相关性质,找到焦点坐标的表达式,根据焦点到圆最短距离,列出距离公式,最后求出 $P$ 点	假设 $A、P、B$ 三个点坐标,根据坐标以及抛物线和圆的表达式,推导出线段 $PA、PB$ 的表达式,再依据公共点 $P$ 得到 $AB$ 的距离表达式,求出三角形面积的表达式。再利用一元二次方程的性质找到表达式的最大值就可以求出三角形面积的最大值

	数学概念的理解	数学性质与定理的掌握	数学知识的迁移	数学知识的综合运用
数学运算	理解焦点坐标的概念和圆的相关概念,理解焦点坐标公式和距离公式	运用坐标公式和最短距离公式,联立并计算出 $P$	求出 $L_{PA}$ 、 $L_{PB}$ 的距离方程、并通过联立方程计算出 $AB$ 的距离方程,通过抛物线方程与 $AB$ 距离方程联立。求出 $AB$ 的表达式,根据三角形面积公式,求出三角形的面积表达式后,便可找到最大值	
直观想象	能够根据公式画出抛物线和圆的图像	画出图像后,依据图形之间的规律和性质,找到解决问题的思路和关键点	通过题目给出的信息找到抛物线和圆的位置关系,并能够画出点 $P$ 、 $A$ 、 $B$ 构成的三角形	

(1) 求  $P$ ;

(2) 若点  $P$  在  $M$  上,  $PA$ 、 $PB$  是  $C$  的两条切线,  $A$ 、 $B$  是切点, 求  $\triangle PAB$  的最大值 (具体分析见表 4)。

## 5 结语

论文参考《课程标准》、PISA2021 模型、UbD 理论,从试卷角度构建数学核心素养评价框架,分析高考数学试卷中数学核心素养的考查情况。该框架针对数学试卷进行分析,重在分析数学核心素养的考察,便于教育工作者操作。

通过对试卷分析,能够了解核心素养的教育重点,有利于教师把握核心素养的教学方向。同时也能够了解试卷考察的具体情况,为试卷命题提供参考<sup>[3]</sup>。

## 参考文献

- [1] 李华,胡典顺.基于数学核心素养评价框架的试卷测评研究——以2019年高考全国卷为例[J].数学教育学报,2020,29(2):18-23.
- [2] 俞梦飞,章飞.核心素养视角下数学高考试卷评价研究——以2018和2019年江苏高考卷为例[J].数学教育学报,2020,29(2):35-40.
- [3] 葛丽婷,施梦媛,于国文.基于UbD理论的单元教学设计——以平面解析几何为例[J].数学教育学报,2020,29(5):25-31.