Discussion of Simple Harmonic Vibration and Its Method of Proof

Yinshuan Ren[1]　Zhufeng Zhang[2]

1. School of Physics and Electronics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun, Guizhou, 558000, China
2. Chongqing College of Mobile Communication, Chongqing, 401520, China

Abstract

This paper introduces the definition of harmonic vibration, and from the dynamic analysis method and energy method prove that the object made harmonic vibration. The final selection of narrative method of harmonic vibration proof, in order to Provide assistance for graduate school candidates.

Keywords

harmonic vibration; dynamic method; energy analysis method

简谐振动及其证明方法的探讨

任银拴 [1]　张珠峰 [2]

1. 黔南民族师范学院物理与电子科学学院，中国·贵州 都匀 558000
2. 重庆移通学院，中国·重庆 401520

摘　要

论文介绍了简谐振动，并从动力学方法和能量分析法证明物体做简谐振动，最后简述证明方法的选取，为研究生入学考生提供帮助。

关键词

简谐振动；动力学方法；能量分析方法

1 引言

振动现象是自然界普遍存在的现象。例如，钟摆的摆动、气缸内活塞的运动、弦乐器中琴弦的振动以及人的心脏跳动等。虽然振动形式多种多样，但均遵从相同的特征和运动学规律。在各种振动中，最简单、最基本、最普遍的振动是简谐振动，其他任何复杂的振动都可分解为若干简谐振动的叠加。因此，论文主要讨论简谐振动的证明方法。

2 简谐振动的定义

2.1 简谐振动方程的推导

如图 1 所示，轻弹簧一端固定，另一端与质量为 m 的物体相连，置于光滑水平面上，如果把物体从平衡位置拉开一定距离后释放，一切阻力不计。此时小球位于平衡位置 O 点，现在把小球拉离平衡位置到达点 A，小球运动如图 1 所示，小球在弹力作用下在其平衡位置附近往复运动，这种理想的振动系统称为弹簧振子。把小球视为质点，取物体平衡位置 O 点为坐标原点，x 轴正向向右建立坐标，任意位置 x 处，物体在受到弹力指向平衡位置 Fx 的作用下围绕平衡位置的运动叫做简谐振动。其中，$F=-kx$。

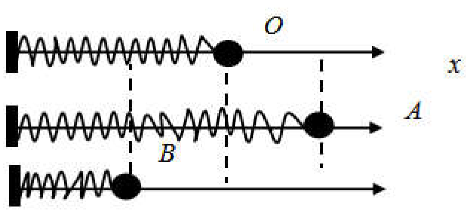

图 1

k 为弹簧的劲度系数，只与弹簧本身的性质有关。负号表示力的方向与位移方向相反。由牛顿第二定律列出物体运动微分方程：

$$-kx=ma=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

【基金项目】本工作获黔南民族师范学院校级项目（2018xjg0530,qnsy2018002）；贵州省科技厅批准（黔科基础〔2020〕1Y208）和贵州省教育厅项目（黔合 KY 字 [2020]208）；重庆邮电大学移通学院项目（项目编号：YTJG2019050）资助。

【作者简介】任银拴（1982–），男，中国陕西渭南人，副教授，从事低维纳米材料及大学物理教学研究。

整理（1）得：$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ 令 $\frac{k}{m}=\omega_0^2$，则有：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0 \quad (2)$$

其中，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 决定于弹簧的劲度系数和振子的质量，解（2）得：

$$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi) \quad (3)$$

根据上述简谐振动的定义（3）式为简谐振动方程。

3 简谐振动的证明

3.1 实例分析

例 1，如图 2 中（b）所示轻质弹簧的一端固定，另一端系一轻绳，轻绳绕过滑轮连接一质量为 m 的物体，绳在轮上不打滑，使物体上下自由振动，求物体做简谐振动。已知弹簧的劲度系数为 k，滑轮的半径为 R，转动惯量为 J。设向下为坐标轴正方向。

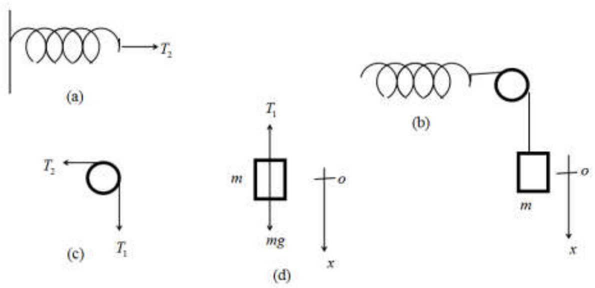

图 2

3.1.1 解法一：动力学方法

首先对物体、滑轮、弹簧的受力情况分析，如分解图 2 中（d）（c）（a）所示，选取坐标 ox 向下为正方向，坐标原点位于物体静止平衡位置，此时弹簧的型变量为 b，有

$$mg-T_1=0 \quad (4)$$

$$T_1R-T_2R=0 \quad (5)$$

$$T_2-kb=0 \quad (6)$$

联立（4）（5）（6）解得：

$$b=\frac{m}{k}g \quad (7)$$

当物体偏离平衡位置 x 时，物体和滑轮的运动学方程分别

$$mg-T_1=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (8)$$

$$T_1R-T_2R=Ja \quad (9)$$

$$T_2=k(b+x) \quad (10)$$

由题目可知绳子在滑轮上不打滑：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ra=a_c \quad (11)$$

由（9）（10）联立消去 T_2 得：

$$T_1R-kR(b+x)=Ja \quad (12)$$

再由（8）（9）联立消去 T_1 得：

$$mg-\frac{J}{R}a+k(b+x)=m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (13)$$

联立（7）（11）（13）消去 a 得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m+\frac{J}{R^2}}x=-w^2x \quad (14)$$

上式即为简谐振动所满足的微分方程，式中 w 为简谐振动的角频率。

令 $w=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{J}{R^2}}}$，解（14）得物体的运动规律可表为：$x=A\sin(wt+\phi)$。

3.1.2 解法二：能量法

取地球，轻弹簧，滑轮和质量为 m 的物体为系统，在物体上下自由振动的过程中，系统不受外力，在整个系统内无非保守力做功，所以系统的机械能守恒。

令物体 m 偏离平衡位置 x 时，物体的运动速度为 v，弹簧伸长量为（$x+b$），滑轮的 $\frac{1}{2}k(x+b)^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Jw^2-mgx=C$ 转动角速度 w，由系统机械能守恒。有

$$\frac{1}{2}k(x+b)^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Jw^2-mgx=C \quad (15)$$

其中，$w=\frac{v}{R}=\frac{1}{R}\frac{dx}{dt}$，

对（15）x 求关于时间 t 的一阶导数，得：

$$k(x+b)x'+mx'x''+\frac{1}{R^2}Jx'x''-mgx'=0 \quad (16)$$

（16）式两边同时除以 x' 得：

$$k(x+b)+mx''+\frac{1}{R^2}Jx''-mg=0 \quad (17)$$

整理（17）得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg-kx-kb}{m+\frac{J}{R^2}}$$

其中，$mg=kb$。因此，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{m+\frac{J}{R^2}}=-w^2x \quad (18)$$

式中，w 为简谐振动的角频率，令 $w=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{J}{R^2}}}$，解（18）的物体的运动规律可为 $x=A\sin(wt+\phi)$。

两种解法各有千秋，动力学方法过程复杂，但思考简单，能量分析法，过程简单，但思考复杂，它是从系统能量的角度来考虑问题。

3.2 例 2：证明单摆做简谐振动

3.2.1 解法一：牛顿第二定律（合力法）

单摆摆长为 r，小球质量为 m。将小球视为质点，建立如图 3 所示的直角坐标系 $O-xy$，对质点进行受力分析，它受自身重力和悬线拉力的合力 F_t 作用，在 F_t 作用下在竖直面内沿圆弧摆动。质点所受合力大小 $F_t=mg\sin|\theta|$，且总指向

$\theta=0$这个平衡位置。当角位移$\theta\le5^\circ$时，$\sin\ \theta\approx\theta$，所受合力为

$$F_t=-mg\theta \qquad (19)$$

所受合力与角位移反向，促使质点回到平衡位置。小球离开平衡位置的位移$x=r\theta$，根据牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2(r\theta)}{dt^2}=-mg\theta \qquad (20)$$

移项整理为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{r}\theta=0 \qquad (21)$$

令$\frac{g}{r}=\omega_0^2$，则有：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0 \qquad (22)$$

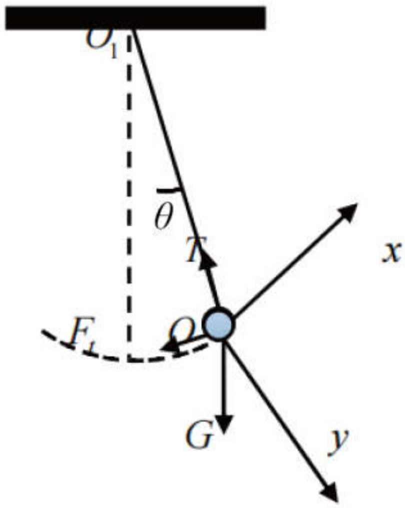

图 3

3.2.2 解法二：刚体转动定律（力矩法）

建立如图 4 所示的直角坐标系$O-xy$小球质量为m，摆长为r。则小球绕 O 点转动的转动惯量为：$I=mr^2$，小球受到的重力矩：$M=-mgr\sin\theta$当$\theta\le5^\circ$时，$\sin\theta\approx\theta$，则有：$M=-mgr\theta$根据刚体转动定律：$M=I\alpha$。

由以上得：$-mgr\theta=mr^2\alpha$，其中$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}$，是小球绕 O 转动的角加速度，则有$-mgr\theta=mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$，移向化简得：$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{r}\theta=0$。

令$\frac{g}{r}=\omega_0^2$，则有：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0 \qquad (23)$$

3.2.3 解法三：保守力系的拉格朗日方程

例 1：证明单摆做简谐振动

建立如图 4 所示的直角坐标系$O-xy$，设单摆摆长为l，小球质量为m，把小球视为质点，取θ为广义坐标，则小球摆动的速率$v=l\dot\theta$，拉格朗日函数为$L=T-V=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+mgl\cos\theta$（选取点$O$为零势能点），把上式代入到保守力系的拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$中得$\ddot\theta+\frac{g}{l}\sin\theta=0$。在$\theta\le5^\circ$时，$\sin\theta\approx\theta$，则有：$\ddot\theta+\frac{g}{l}\theta=0$。令$\frac{g}{l}=\omega_0^2$，则有：$\ddot\theta+\omega_0^2\theta=0$即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0 \qquad (24)$$

$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$只与振动系统本身的性质有关，所以单摆做简谐振动。

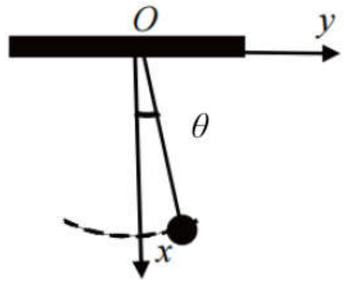

图 4

3.2.4 解法四：机械能守恒定律

建立如图 4 所示的直角坐标系$O-xy$, 由机械能守恒定律得：

$$\frac{1}{2}mv^2+mgr(1-\cos\theta)=常量 \qquad (25)$$

其中，$v=r\times\omega$，$\omega=\frac{d\theta}{dt}$为小球摆动的角速度。因为$r$与$\omega$的方向垂直，所以$v=r\omega=r\frac{d\theta}{dt}$由于$\theta$很小，$\cos\theta$按泰勒级数展开取前两项得$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$，对（25）式中$\theta$求关于时间 t 的一阶导数得：$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{r}\theta=0$令$\frac{g}{r}=\omega_0^2$，则有：$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0$。

3.3 归纳

一个物体是否做简谐振动，我们可从动力学方法和能量分析方法作出判断 . 动力学的分析方法可由物体所受系合力（力矩）即从牛顿第二定律和刚体转动定律是否满足简谐振动的动力学特征（或简谐振动的微分方程）。也可以由能量法进行判断，能量分析方法也可以分为机械能守恒定律和保守力系的拉格朗日方程两种形式，首先需要确定振动系统确定系统的机械能是否守恒，然后需要确定振动物体平衡位置和相应的势能零点，再写出物体在任意一位置时的机械能表达形式，并将其一对时间求阶导数后与简谐振动的微分方程作比较，最后作出是否作简谐振动的判断。若用保守力系的拉格朗日方程，首先要确定振动系统受到的力是否为保守力，找到广义坐标，求出振动系统的动能和势能，并得出拉格朗日函数，把拉格朗日函数代入保守力系的拉格朗日方程中，化简后与简谐振动的微分方程作比较，最后判断物体是否做简谐振动的判断。

4 结语

通过以上实例分析，已经能够很好地反映了动力学方

法和能量法各有千秋，动力学方法适合于简单振动系统且物体受力简单，能量法适用于振动系统复杂且机械能守恒的简谐振动，它可以避免对振子受力分析带来的困难。能量法探讨推理严谨，又便于理解和掌握，是一种探讨简谐振动规律的好方法。因此，证明过程的难易程度关键在于方法的选取，希望能为研究生入学考生提供帮助。

参考文献

[1] 漆安慎,杜婵英.力学[M].北京:高等教育出版社,2005.

[2] 孙迺疆,胡盘新.普通物理学(第六版)习题分析与解答[M].北京:高等教育出版社,2006.

[3] 罗益民,余燕.大学物理[M].北京:北京邮电大学出版社,2014.

[4] 周衍柏.理论力学[M].北京:高等教育出版社,2009.