 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v6i15.12692

Comparative Researcch on Harmonic Vibration Potential Energy and Elastic Potential Energy

Xuehui Xiong Xing Li Lili Zheng

School of Optoelectronic Materials and Technology, Jianghan University, Wuhan, Hubei, 430056, China

Abstract

The potential energy function $kx^2/2$ of a simple harmonic vibration system given in general textbooks is the same as the expression of spring elastic potential energy. When analyzing a simple harmonic vibration system with a spring, students do not know what their relationship is, and the formula is ambiguous. In addition, in simple harmonic vibrations containing other conservative forces such as gravity and electrostatic field forces, where the potential energy functions of these conservative forces go is also a source of confusion for students when learning this section. Through comparative analysis and research of specific examples, this paper enables students to clarify that the elastic potential energy of a spring is the potential energy of a conservative force such as elasticity, which is caused by spring deformation. The potential energy function of simple harmonic vibration is the sum of the potential energy of all conservative forces in the entire system relative to the linear restoring force at 0. The potential energy function of simple harmonic vibration can be expressed in the form of $kx^2/2$, where k is an inherent property of the system and is determined by the system parameters, such as the coefficient of harmonic vibration of a small angle simple pendulum $k=mg/l$.

Keywords

harmonic vibration; conservative force; potential energy function; elastic potential energy

简谐振动势能与弹性势能对比研究

熊学辉 李星 郑利丽

江汉大学光电材料与技术学院，中国 · 湖北 武汉 430056

摘 要

一般教材给出的简谐振动系统的势能函数$kx^2/2$与弹簧弹性势能的表达形式一样，学生在分析带弹簧的简谐振动系统时，不知它们有什么关联，运用公式时模棱两可。此外，在含有重力、静电场力等其他保守力的简谐振动中，这些保守力的势能函数去哪儿了，也是学生学习这部分内容时疑惑的地方。论文通过具体实例的对比分析研究，可以让学生明确弹簧的弹性势能是针对弹力这种保守力的势能，是由于弹簧形变引起的弹性势能，而简谐振动的势能函数是整个系统所有保守力势能相对于线性回复力为0处的势能之和。简谐振动势能函数都可表示为$kx^2/2$这种形式，k是系统固有属性，由系统的参数决定，比如小角度单摆简谐振动的系数$k=mg/l$。

关键词

简谐振动；保守力；势能函数；弹性势能

1 引言

机械简谐振动是一种最直观，最基本的振动形式，是其他广义振动或复杂振动的基础。对于大学物理课程，简谐振动内容非常重要。一般大学物理教材 [1-3] 都会从运动学、动力学以及能量三个方面讲解简谐振动的特点。对简谐振动的势能函数一般都是以水平放置的弹簧振子为例，得到势能函数，由于弹簧水平放置，恰好弹簧原长和平衡位置重合，形式也与弹性势能函数一样，这就导致学生在分析带弹簧的简谐振动系统时，不知简谐振动势能与弹簧弹性势能有什么关联，在运用公式计算时常常模棱两可。此外，在含有重力、静电场力的简谐振动中这些保守力的势能函数到哪儿去了呢？难道也满足这个表达形式？这些都是学生学习这部分内容时比较疑惑的地方。为此，论文利用具体的实例对比研究了简谐振动势能函数与弹簧弹性势能函数的关系，也研究了一般教材中简谐振动势能函数形式中各物理量的含义。

2 竖直放置的弹簧谐振子的势能函数与弹性势能函数对比分析

图 1 描述的是一个竖直放置的弹簧振子，图 1（a）表示弹簧原长。挂了重物 m，由于重力，会拉伸弹簧到平衡位置，图中 X 轴坐标原点 0，相对于原长伸长了 x_0，如图 1（b）所示。设谐振子离开平衡位置在位置 x 处，如图 1（c）

【作者简介】熊学辉（1975–），女，中国湖北黄冈人，博士，副教授，从事教育教学研究。

所示，弹簧谐振子的振动势能是不是可表示为 $kx^2/2$。下面分析竖直放置的弹簧谐振子的弹性势能函数。竖直放置的弹簧谐振子受到重力和弹簧的弹力，在平衡位置谐振子回复力为 0，相对于原长被拉升了 x_0，$mg=kx_0$ 以原长为参考势能零点，则平衡位置处具有的弹性势能为。而与平衡位置相距位置，则与原长处相距 $x+x_0$，则弹簧谐振子具有的弹性势能为 $k(x+x_0)^2/2$。而弹簧谐振子还受到了重力，谐振子在竖直方向振动，所以还具有重力势能。设平衡位置为重力势能零点，则在 x 处的重力势能为 $-mgx$。

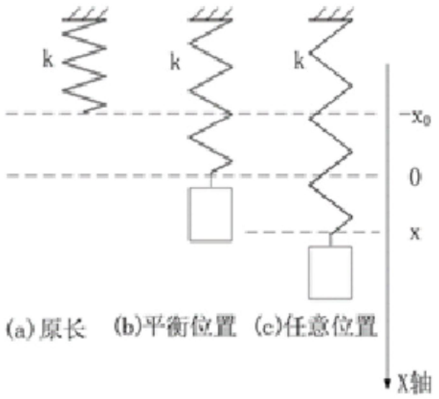

图 1 竖直放置的弹簧振子

所以弹簧谐振子在离开平衡位置 x 处具有的势能为弹性势能和重力势能之和。若把谐振子在平衡位置处的势能规定为势能零点，则与平衡位置相距 x 处的势能函数为该点处的重力势能和弹性势能之和减去平衡位置处对应的重力势能和弹性势能，如图 2 所示。

$$\text{简谐振动势能}E_p = x\text{位置处的所有势能}E_{px} - \text{谐振动平衡位置处所有势能}E_{p0}$$

在竖直放置的弹簧谐振子系统，有重力势能和弹簧的弹性势能

$$\therefore E_p = (E_{\text{弹}x} + E_{\text{重}x}) - (E_{\text{弹}0} + E_{\text{重}0})$$

$$= (\frac{1}{2}k(x+x_0)^2 + (-mgx)) - (\frac{1}{2}kx_0^2 + 0)$$

$$\text{又}\ mg = kx_0$$

$$\text{化简得}\ E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

图 2 势能函数

由以上详细说明和推导可知，谐振子的势能函数 $kx^2/2$，是简谐振动系统中所有保守力相对于线性回复力为 0 处的势能之和，所以公式中 x 是离开平衡位置的位移。而弹簧的弹性势能是针对弹力这种保守力的势能，是由于弹簧形变引起的弹性势能，所以公式的 x 是相对于原长的形变量。

3 具有其他保守力系统的简谐振动势能函数也可表达为 $kx^2/2$

物体做简谐振动的重要动力学判据 [1-4] 就是谐振子受到线性回复力的作用，可以围绕平衡点做往返运动，线性回复力做的功 $A=\int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$，由此可知谐振子线性回复力做的功只与谐振子的首末位置有关，具有保守力性质，说明线性回复力可以是一种保守力，或保守力的分量或几种保守力的合力 [4]，整个系统只有线性回复力做功，所以简谐振动机械能守恒 [1-5]。

一般所说的简谐振动势能函数是相对平衡位置，若以平衡位置为势能零点，则任意振动位置 x 处的势能函数 $E_p = \int_x^0 -kxdx = -(0-\frac{1}{2}kx^2) = \frac{1}{2}kx^2$ 。

上述利用简谐振动动力学特征线性回复力的判据，推导出了简谐振动势能函数形式 $E_p=kx^2/2$，该公式是以平衡位置为势能零点，其中 k 是线性回复力与位移的比值系数，x 为相对于平衡位置的位移。

以小角度单摆为例，如图 3 所示，讨论其他简谐振动系统的势能函数也可表示成 $kx^2/2$ 这种形式，但每种简谐振动系统的 k 的具体物理含义会有所不同。

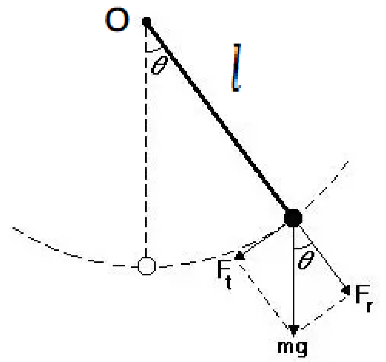

图 3 小角度单摆简谐振动系统

比如常见的小角度单摆，线性回复力是重力的切向分力提供，仅有重力势能 $mgl(1-cos\theta)$，其中 m 为摆球质量，l 为摆线长度，θ 为离开单摆最低点（线性回复力为 0）的角位移。

简谐振动势能函数可化为：

(/2)，其中线位移 $x=l\theta$，比对形式 $kx^2/2$ 可知单摆这种简谐振动的 $k=mg/l$ 小角度单摆，线性回复力为重力的切向分力，$mgsin\theta = -kx = -klsin\theta$，得 $k=mg/l$。

由此可知，不论是从能量的角度还是动力学角度，都可推导出，小角度单摆简谐振动的线性回复力与位移变化的比值系数 $k=mg/l$。

由以上能量和线性回复力的分析可知单摆简谐振动系统的势能函数也可以写成 $kx^2/2$，其中 $k=mg/l$。

4 结论

论文利用竖直弹簧振子模型对比分析了弹簧弹性势能和简谐振动势能的关系，明确了弹簧的弹性势能是针对弹力这种保守力的势能，是由于弹簧形变引起的弹性势能，所以

公式 $kx^2/2$ 中的 x 是相对于弹簧原长的改变量。而简谐振动的势能函数，是整个系统所有保守力势能相对于线性回复力为 0 处的势能之和，所以简谐振动势能函数中的 x 是离开平衡位置的位移。不论简谐振动是否含有弹簧弹力，简谐振动势能函数都可表示为 $kx^2/2$ 这种形式，k 是线性回复力与位移的比例系数，是系统固有属性，由系统的参数决定，比如小角度单摆简谐振动的系数 $k=mg/l$。

参考文献

[1] 桑建平,丁么明,丁世学.新编大学物理上册[M].武汉:武汉大学出版社,2012.

[2] 赵近芳,颜晓红.大学物理下册[M].北京:北京邮电大学出版社,2002.

[3] 张三慧.大学物理学(第四册)波动与光学[M].北京:清华大学出版社,2000.

[4] 刘光明.线性回复力的特点及其应用[J].绍兴师专学报(自然科学版),1989(6):66-69.

[5] 荆亚玲,李雪春.讨论简谐振动不容忽视的问题[J].物理与工程,2008,18(19):9-11.