

# Research on the Integration of Online and Offline “Mixed” Teaching in Probability Theory Teaching

Guoyu Chen Yan Cheng Junxia Chen Qingqing Li

Army Artillery and Air Defense College, Hefei, Anhui, 250031, China

## Abstract

Probability theory and mathematical statistics is a very important course in the undergraduate education of military colleges, and it is a basic course of mathematics for students of all majors. Due to its strong practicability, the study of probability theory is related to the students' subsequent course learning and the cultivation of mathematical literacy. With the rapid development of informatization today, traditional teaching can no longer meet the needs of students' training objectives. Therefore, teaching reform must be carried out. It can maximize the efficiency of the classroom and fully mobilize the initiative, enthusiasm and creativity of the students. Through a teaching case, this paper discusses the teaching design of online and offline integrated teaching.

## Keywords

probability theory and mathematical statistics; online and offline mixed teaching; multiplication formula

# 在概率论教学中线上线下的“混合式”教学的融合探究

陈国玉 程燕 陈俊霞 李卿擎

陆军炮兵防空兵学院, 中国·安徽 合肥 250031

## 摘要

概率论与数理统计是军队院校本科生教育中一门非常重要的课程,是各专业学员的数学基础课。因为实用性很强,所以概率论的学习关系到学员后续课程的学习和数学素养的养成,在信息化程度高速发展的今天,传统教学已经不能满足对学员培养目标的需求,因此必须进行教学改革,线上线下混合式教学作为近几年非常热门的教学方式,可以最大限度地提高课堂的效率,充分调动学员的主动性、积极性、创造性。论文通过一个教学案例,探讨了线上线下融合式教学的教学设计。

## 关键词

概率论与数理统计;线上线下混合式教学;乘法公式

## 1 概述

### 1.1 概率论与数理统计教学现状分析

概率论与数理统计是某院生长军官本科高等教育中的一门科学文化必修课,是学员学好其他专业课程的前提和工具。长期以来,我们都是利用传统的教学方式,以教员作为课堂的主体,学员被动的接受“填鸭式”教学,课堂效率比较低,虽然教员非常卖力地教,但是学员缺乏主观能动性,被动地接受教员的灌输,可能会出现左耳朵进,右耳朵出的现象,也可能出现学员“人在课堂,心在外面”的现象。2020年军队院校响应教育部“停课不停学”的号召,开始利用腾讯会议进行线上教学,自此,线上教学逐步走进了军校课堂,之后与传统教学融合在一起,但是因为教员线上教学素质和教学保障条件的不足,线上线下混合式教学还是停留在线上发资料,主课堂仍然是教员讲授为传统的教学模式。

【基金项目】陆军炮兵防空兵学院 2023 年度教育教学研究项目(项目编号: PFXY220101008)。

【作者简介】陈国玉(1974-),女,中国山东利津人,硕士,副教授,从事偏微分方程数值解研究。

式,严重影响了线上线下混合式教学的教学效果。而概率论产生于赌博,来源于实际,许多知识和日常生活密切相关,本课程非常适合利用丰富的在线教学资源进行线上线下混合式教学,因此有必要研究如何进行线上线下混合式教学,以期达到教学效果最优。

### 1.2 学情分析

学习《概率论与数理统计》时学员应该具备高等数学的知识作为本课程的学习基础,但我带的学员整体较差,学员人数又多,有73个学员,相对于40个人左右的小班来说人数偏多,这些学员普遍存在知识掌握不牢固,高等数学上、下册的成绩在18个教学班中都是倒数第一,其中高等数学上册期末考试有15个学员不及格,甚至还有5个学员补考不及格,高等数学下册期末考试有13个学员不及格,因此要想让他们学好概率论,教员必须耗费教学时间去巩固学生的高等数学基础,这使得课堂教学时间更加紧张。针对这种情况,我抓住暑假这个黄金时间,在暑假成立了概率论与数理统计暑期学习班级群,指定了9个组长,把全班学员分成了9个学习小组,指派课代表为监督员,利用大学慕课上的优质资源,给学员制定了概率论线上预习任务,指定了西北工业大学、郑州轻工业大学、国防科技大学等军地院校的优

秀概率论慕课资源进行学习,同时对于高等数学基础差的学员,指定了国防科技大学的高等数学慕课课程进行辅助学习,每周概率论与数理统计的预习进度为一章,每章结束后,精心设计测试题,由课代表组织学员进行线上测试,统计考试成绩作为期末平时成绩的参考,三周之后对前三章进行了综合测试,为了检验学员学习效果的真实性,笔者精心设计了限时测试题,随机抽取学员进行线上解答,结果发现虽然有些是学习中的难点,但是大部分学员通过自学也能学会,通过近四周的线上慕课学习。我们班完成了概率论与数理统计前三章的学习,为线下的课堂教学争取了时间,很多学员养成了良好的自学习惯。例如,在学习中心极限定理的过程中,对于没有学太懂的知识点,学员高利民就利用周末在B站上找了一个视频课,针对知识点反复听,最终自己解决了学习中的困惑,可见假期的线上学习习惯的养成对学员的帮助是非常大的,自主学习的观念在学员中生了根,发了芽<sup>[1]</sup>。

## 2 混合式教学实施过程——以乘法公式为例

### 2.1 课前

把准备好的教学资料上传至电子书包,提前一周发布预习任务清单:预习PPT和线上观看小视频《狼来了》,思考问题:村民们对这个小孩的可信度是怎样逐渐下降的?如何利用数学知识对孩子的可信度进行量化呢?

### 2.2 课中

#### 2.2.1 问题引入

通过重温“狼来了”简短视频,利用问题驱动式教学法引入问题:通过预习,你们找到如何利用概率论的知识说明小孩的可信度下降的量化方法了吗?激发学员的学习兴趣,引导学员积极思考问题,引导学员思考如何利用乘法公式来量化放羊小孩可信度的变化过程。

首先我们给出需要的条件:假设最初大家认为这个小孩的可信度为0.8,并认为一个可信的孩子说谎的概率为0.1,一个不可信的孩子说谎的概率为0.5。接下来我们引入事件A,B,我们用事件A表示孩子可信,用事件B表示孩子说谎,图1能够帮助同学们找到事件B与事件A的关系。

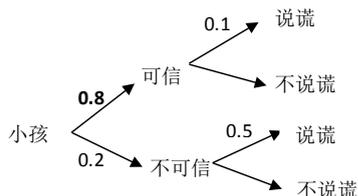


图1 概率树图

下面建立评价模型:由条件可知, $P(A)=0.8$ , $P(\bar{A})=0.2$ , $P(B|A)=0.1$ , $P(B|\bar{A})=0.5$ ,容易发现事件B与事件A有关,且 $B=AB\cup\bar{A}B$ ,让我们来算一下孩子第一次说谎后的可信度。首先提问学生:我们要计算哪个事件的概率呢?让学生知道我们的目的,此时启发学生思考。通过启发,学员们很容易明白要计算的是 $P(A|B)$ ,根据 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ ,

问题转化为计算 $P(B)$ 和 $P(AB)$ ,下面我们看一下如何计算 $P(B)$ ,因为 $AB$ 与 $\bar{A}B$ 互不相容,所以由和事件的可加性知,

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B), \text{代入到 } P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \text{ 中, 得到}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}, \text{这样就建立了可信度的评价模型。}$$

这个模型中出现了两个事件的积事件的概率 $P(AB)$ , $P(\bar{A}B)$ 。这样的公式我们从来没有遇到过,怎么解决呢?引发学生思考,然后指出这个问题其实很简单,我们注意到在条件概率

中就有积事件的概率,由条件概率的公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

两端同乘以 $P(B)$ ,得到当 $P(B)>0$ 时:

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (1)$$

此时提问:如何计算 $P(BA)$ 呢?让学员讨论后回答,学员很快会给出答案:将A,B的位置对调,得到 $P(BA)=P(A)P(B|A)$ 而 $P(AB)=P(BA)$ ,所以就有:

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (2)$$

实际上公式(1)和公式(2)都叫作乘法公式,下面我们给出乘法公式:当 $P(A)>0$ , $P(B)>0$ 时, $P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$ 。

针对学生学习中的困惑,下面对公式进行说明:

公式的作用:把积事件的概率计算问题转化为两个事件的概率之积,其中一个为条件概率,到底选取公式(1)还是公式(2)呢?此时让学员进行讨论,经过讨论后,让学员给出结果,学员会给出如下结果:实际使用时需要看哪个事件先发生,并且这个事件发生的条件下另外一个事件发生的概率已知或者容易计算,此时就可以选出正确的公式。

公式的记忆方法:把 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ 称为按B展开,此时可以理解为事件B先发生了,在B发生的条件下A发生的条件概率易得,同理把 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 称为按A展开,无论是按B展开还是按A展开,右边都是一种对称的结构,按B展开,右边为BAB,按A展开,结果为ABA,注意两个公式中作为条件的事件都是出现了两次。

重点研究 $P(A|B)$ , $P(AB)$ 两者的区别: $P(A|B)$ 是条件概率,计算的是在B发生的条件下事件A发生的概率,故样本空间从S缩小为了B,即计算的是A占有B的比例,也即AB占有B的比例, $P(AB)$ 是事件AB同时发生的概率,计算的是AB占有样本空间S的比例,故有 $P(AB)\leq P(A|B)$ 。

解决了两个事件的积事件的概率的计算之后,有的同学可能会问:三个或者更多个事件的积事件的概率又该如何计算呢?下面我们对乘法公式作一下推广,若 $P(AB)>0$ 时,把AB看成一个事件,代入乘法公式,则有:

$$P(ABC)=P(AB)P(C|AB) \quad (3)$$

再利用一次乘法公式,得到 $P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$ ,同样的道理可以推广得到:当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,有:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad (4)$$

这样我们就把  $n$  个事件积事件的概率的计算问题转化成了  $n$  个事件的概率的乘积, 其中有  $n-1$  个为条件概率, 到此乘法公式就比较完整了。

### 2.2.2 应用公式解决案例

让我们回到引例, 计算一下孩子的可信度(结合概率树进行计算), 由条件概率公式得  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ , 且  $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$ , 即  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(AB) + P(\bar{A}B)}$ , 把分子分母中的各项用乘法公式展开, 注意提醒学生是按照哪个事件展开, 分别按照  $A, \bar{A}$  展开, 有  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$ , 代入数据得到结果为 0.444, 即说一次谎后孩子的可信度从 0.8 降到了 0.444, 下降的幅度还是很大的, 接下来提问学生: 请问你们能不能计算孩子第二次说谎后的可信度? 此时的评价模型又是什么呢?

下面我请一位同学上来讲台演示, 因为前面计算过一次可信度, 学生很容易发现此时的评价模型仍然为  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$ , 教师要提醒学生注意此时的  $P(A)$  用  $P(A|B) = 0.444$  代替,  $P(\bar{A})$  用  $P(\bar{A}|B) = 0.556$  代替, 此时学生计算得到第二次可信度的结果为 0.138, 即说两次谎话后孩子的可信度从 0.8 降为了 0.138, 如此低的可信度, 难怪村民们第三次听到呼救不再相信他了。实际上, 这个过程可以继续做下去, 此时再让学生分组讨论, 计算孩子连续说 4 次谎后的可信度是多少? 同学们经过分组计算, 很容易计算出结果为 0.00638, 此时教师再简单演示如何计算孩子说四次谎后的可信度, 并用 matlab 软件作出孩子可信度下降的图形, 从图中可以发现, 孩子说谎后的可信度下降的非常快, 当说第四次谎之后的可信度变为 0.00638, 也就是说 100 句话中、接近 99 句为假话, 可信度如此之低, 难怪会失去人们的信任。通过这个大家很熟悉的小故事对大家进行了诚信教育, 起到了教书育人的效果。教员借此可以进一步进行说明: 事实上, 这个故事告诉我们, 诚信之所以重要, 就在于人们会根据与你交往过程中发生的事件去修正对你的印象, 并且这种修正可以一直持续下去。就如“狼来了”的故事中, 我们假设村民最初对这个孩子的可信度为 0.8, 这个可信度还是比较高的, 然后我们建立了一个可信度的评价模型,  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$ , 通过这个模型计算出孩子说一次谎后的可信度, 即修正了对孩子的可信度的认识, 孩子又说了一次谎, 我们再次利用这个模型计算出了孩子的可信度, 又一次修正了对孩子可信度的认识, 这个修正的过程可以一直持续下去。事实上, 早在 18 世纪, 英国的数学家贝叶斯就提出: “用客观的新信息更新我们最初关于某个事物的信念后, 就会得到一个新的, 改进了的信

念!”这正是贝叶斯公式体现出来的思想, 那么什么是贝叶斯公式呢? 下次课我们再一起揭开它神秘的面纱。这样的课堂延伸使得同学们对贝叶斯公式产生了很大的兴趣, 有助于后面内容的学习。

### 2.2.3 问题开拓

请同学们思考:

①用今天所学的知识解析一下“烽火戏诸侯”的故事和“水滴石穿”的成语。

②找出  $P(A)$  与  $P(A|B)$  的区别和联系。

这两个问题一个是巩固今天所学的内容, 一个是为后续的贝叶斯公式做铺垫, 使学生感到学有所用, 能够起到很好的效果。

通过这样的教学设计, 使学生学得有兴趣, 学得主动, 知识的掌握更加牢固, 教学过程生动有趣, 徐徐善诱, 激发了学生的求知欲, 使学生愿意主动参与教学, 从而培养了学生的探索能力和自学能力, 为后续的学习打下良好的基础。

### 2.3 课后

①关于抽签问题的讨论:  $n$  个人以抽签的方式决定谁可以得到仅有的一个免费海外旅游大奖,  $n$  个人依次不放回抽签, 求第  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 个人抽中的概率。答案传至爱课堂平台, 大家相互修改并进行讨论。

②上网搜索三门问题并进行小组讨论, 下次上课时进行课堂讨论。

③课后继续查阅资料了解乘法公式的应用, 并以小组为单位提交研究报告。

④线上课程思政。

线上资源丰富, 尤其是课程思政资源非常多, 如军事频道的航母舰载机相关视频, 并在线上讨论区进行讨论, 针对不同的思政点, 各小组学员参与讨论, 并把讨论的最终结果以小论文的形式传到电子书包的思政库, 这样既能对学员的价值观、人生观、道德观的培养起到了良好的促进作用, 又培养了学员的团队意识, 协作精神, 也提高了学员的眼界, 锻炼了他们的写作能力<sup>[1]</sup>。

### 3 结语

经过暑假一个月的线上学习, 开学后三个月的线上线下混合式学习, 概率论与数理统计课程顺利结课, 通过线上线下混合式教学, 形成了思考问题、探索问题、发现问题、解决问题的学习方式, 逐渐形成了发散性思维和创造性思维, 大家通过线上交流, 取长补短, 相互学习, 扩大了知识容量, 形成了学习的良性循环, 相信概率论与数理统计的线上线下混合式教学会让他们终身受益。

### 参考文献

- [1] 赵云平. 关于全概率公式的教学探析[J]. 农村经济, 2016, 27(22): 239-241.
- [2] 王晓芳, 崔军. 基于职教云平台的线上线下混合式教学模式[J]. 电子技术与软件工程, 2018(13): 124-125.