

Focus on Knowledge Regrowth and Enhance Mathematics Core Literacy——Looking for Isosceles, Finding Right Angles, Constructing Equations and Solving Rectangular Folding Problems

Wenxing Shen

Zhenhai Jiaochuan Academy, Ningbo, Zhejiang, 315201, China

Abstract

In this paper, the teaching design of the topic review lesson of “Rectangular Folding Problem” is taken as the carrier, focusing on the regrowth of the knowledge learned, and revealing the basic geometric model generated in the rectangular folding transformation. Let students get a general method to solve the problem of rectangular folding by hands-on operation, guessing verification, and rigorous proof, which enhances students’ core literacy in the areas of “symbolic-graphic combination, classification discussion, logical reasoning, dynamic change, mathematical operation, graphic abstraction and mathematical modeling”.

Keywords

rectangular folding; look for isosceles; find right angles; construct equations; mathematical core literacy

聚焦知识再生长提升数学核心素养——找等腰、寻直角、构方程巧解矩形折叠问题

沈文星

镇海蛟川书院, 中国·浙江 宁波 315201

摘要

本文以“矩形折叠问题”一堂专题复习课的教学设计为载体, 聚焦所学知识的再生长, 揭示矩形折叠变换中生成的基本几何模型, 让学生通过动手操作、猜想验证、严谨证明等方式得到解决矩形折叠问题的一般方法, 提升学生在“数形结合、分类讨论、逻辑推理、动态变化、数学运算、图形抽象与数学建模”等方面的数学核心素养。

关键词

矩形折叠; 找等腰; 寻直角; 构方程; 数学核心素养

1 引言

折叠问题的实质是轴对称变换, 在中国《义务教育数学课程标准》(2011)版中, 图形的轴对称是“图形的变化”中的一部分内容, 也是学生学习的重点内容之一。因此, 几何折叠问题在近几年中考中频频出现, 尤其是矩形折叠。其题型多样、变化灵活, 不仅考查折叠图形的基本性质, 还考查等腰三角形、直角三角形、勾股定理等内容, 对学生的空间想象能力与动手操作能力是很大的挑战, 具体到实际情景, 由于动手操作和数学知识结合等方面的不足, 学生往往困惑于不能将折叠问题数学化, 得不到问题的有效解答^[1]。

为此, 本文以“矩形折叠问题”一堂专题复习课的教学设计为载体, 让学生在操作中思考, 体会折叠中图形的不同变化, 梳理折叠操作的特征和性质。通过动手操作、猜想验证, 严谨证明等方式, 让学生体会从复杂图形中找等腰和直角三角形等简单基本图形的方法和技能, 通过生生互动, 师生互动等有趣的数学活动经验促进学生个性化的理解, 让学生体验综合应用数学知识解决折叠问题的方法策略, 体会知识间的联系, 聚焦所学特殊三角形等知识的再生长, 提炼通性通法, 感受数学学习的乐趣和价值, 提升学生在“数形结合、分类讨论、逻辑推理、动态变化、数学运算、图形抽象与数学建模”等方面的数学核心素养。

2 回顾旧知，感悟知识再生长

2.1 简单几何图形回顾

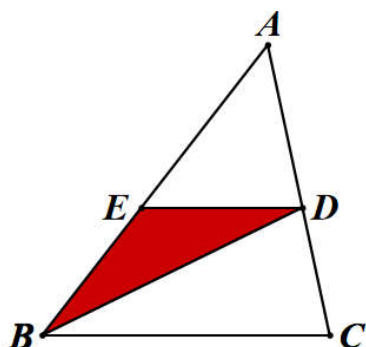


图1 三角形

如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D ， $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E 。

师：图中 $\triangle BED$ 是什么三角形？请简单说明。

生： $\because BD$ 为角平分线， $\therefore \angle EBD = \angle CBD$ $\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \angle EDB = \angle CBD$ ， $\therefore \angle EDB = \angle EBD$ ， $\therefore EB = ED$ ，即 $\triangle BED$ 为等腰三角形。

师生一起归纳出基本模型：角平分线 + 平行线 = 等腰三角形，个性化的口诀：平分角相等，平行角相等，代换角相等，等角对等边。

2.2 加强动手操作，得到知识再生长

如图2，在用长方形纸片折“爱的纽带”的活动中，你有哪些发现？矩形折叠是一个低起点操作活动，设计此活动，目的在于唤醒学生对折叠问题的基本认知。教学中，放手让学生自己操作，随意折，有目的性的折，教师鼓励学生多尝试，并进行折叠前后的对比和分析，必要时配合图示，发现的显性部分围绕轴对称、全等、角相等、线段相等、垂直平分等等，间接结论有角与角之间的关系，线段之间的关系等等，我们要耐心观看和倾听，遇到典型操作，要求学生跟随展示再做一遍，教师要在关键处追问：为什么相等？你是怎么发现的？他说的对吗？你有不同的发现吗？此活动可以分为三步走：操作展示，直观感知；赋值求角，体会关联；聚合信息，发现模型。

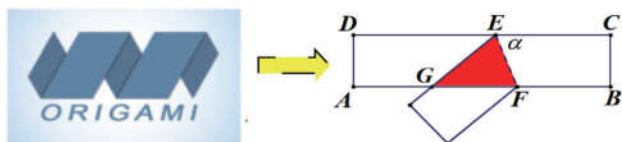


图2 爱的纽带

师：图中有等腰三角形吗？

生：有， $\triangle BED$ 是等腰三角形。 $\because$ 折叠， $\therefore \angle CEF = \angle GEF$ ， $\because$ 矩形， $\therefore \angle CEF = \angle EFG$ ， $\therefore \angle GEF = \angle EFG$ ， $\therefore GE = GF$ ，即 $\triangle BED$ 是等腰三角形。

图形折叠的实质是轴对称变换，抓住本质发现其中的不变量——折叠线即角平分线，矩形对边平行又形成相等的内错角，角角相等，与旧知中的平分角相等，平行角相等，代换角相等，等角对等边，一一对应理解，整理出通性。

师生一起归纳新模型：矩形折叠中的等腰，新口诀：折叠角相等，平行角相等，代换角相等，等角对等边。

3 加强综合运用，提升核心素养

3.1 例1

如图3，将长方形纸片 $ABCD$ 折叠， B 、 C 两点恰好重合落在 AD 上的点 P 处，且 $PM=3$ ， $PN=4$ ， $\angle MPN=90^\circ$ ，则 $HG=$ _____。

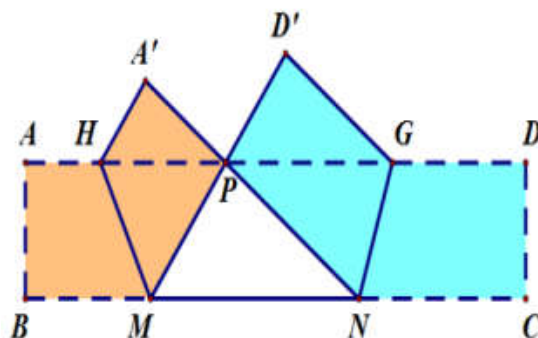


图3 例1 长方形

师：观察图像，你能发现图中的等腰三角形吗？

生：有， $\triangle PHM$ 和 $\triangle PNG$ 是等腰三角形。

分析：识别模型，折叠角相等—— $\angle BMH = \angle PMH$ ；平行角相等—— $\angle PHM = \angle BMH$ ；代换角相等—— $\angle PMH = \angle PHM$ ；等角对等边—— $PH = PM$ ， $\therefore \triangle PHM$ 是等腰三角形，同理可得 $\triangle PNG$ 是等腰三角形。 $\therefore PH = PM = BM = 3$ ， $PG = PN = NC = 4$ ， $\therefore HG = 7$ 。

小结：让学生观察图形的折叠，感知线段和角、三角形等基本图形的结构、位置和数量关系、几何特征，初次尝试使用模型找等腰三角形来解决问题，体会模型思想解决问题的便利，增强矩形折叠找等腰的能力。

3.2 例2

如图，将长方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，重叠部

分为 $\triangle AEC$ 。

(1) 若 $AB=3$, $\angle BAC=30^\circ$ 。

①求 $\angle AEC$ 的度数

②求 AE

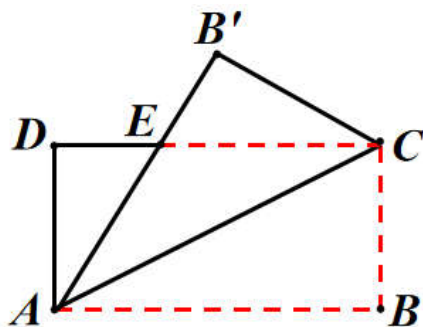


图4 例2 长方形

师:观察图像,图中有哪些特殊三角形?

生:有, $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\triangle AEC$ 是等腰三角形。

分析: $\because$ 折叠, $\therefore \angle EAC = \angle BAC = 30^\circ = \angle EAD$,
 $\therefore \triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 是含 30° 的直角三角形,运用边长比很容易求得 $AE=2$ 。

小结:根据图形折叠中对应角相等,容易得到顶点A处三个角相等均为 30° ,当直角三角形中含有 30° 角时,运用边长比求三角形边长是常见的问题,学生运用熟练。因此设置第二问,用勾股定理求一般直角三角形的边长问题,进一步体会矩形折叠找等腰解决问题的过程。

(2) 若 $AB=4$, $AD=2$ 。

①求 AE 的长

②求 $\triangle AEC$ 的面积

师:图中 $\triangle AEC$ 还是等腰三角形吗?

生:是的。 $\because$ 折叠角相等,平行角相等,代换角相等,等角对等边。

分析: $\because \triangle AEC$ 是等腰三角形, $\therefore AE=EC=x$,
则 $DE=4-x$, 在直角 $\triangle ADE$ 中, $AD^2 + DE^2 = AE^2$
 $\therefore 2^2 + (4-x)^2 = x^2 \quad \therefore x = \frac{5}{2}$ 即 $AE = \frac{5}{2}$,
 $\therefore S_{\triangle AEC} = \frac{5}{2}$ 。

小结:到此,学生已基本掌握运用模型找等腰的技巧,体会到运用等腰三角形性质,用未知数表示出与所求边有关的边长,从而在直角三角形中,运用勾股定理建立方程求解

的方法与过程。学生经历直接观察到理性分析的过程,激发学习兴趣,较好的启动学习自身的内驱力,产生向难题挑战的愿望。

3.3 例3

如图,长方形纸片ABCD中,M是BC上一点,N是CD上一点,将 $\triangle MCN$ 沿MN折叠得到 $\triangle MEN$,再将 $\triangle AND$ 沿AN折叠得到 $\triangle ANF$,点F恰好落在EN上。若 $AD=3$, $DN=1$,求EF的长。

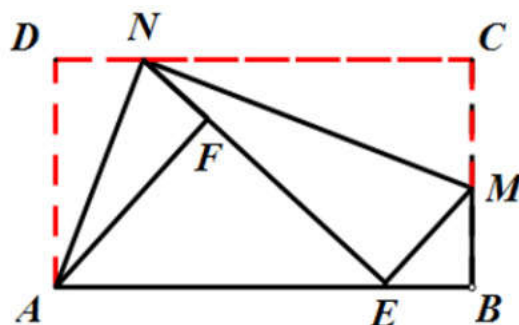


图5 例3 长方形

师:观察图像,图中有等腰三角形吗?

生:有, $\triangle AEN$ 是等腰三角形。

师:根据题目条件,结合等腰三角形,你能用恰当的未知数表示出与EF有关的线段吗?

生:设 $EF=x$,则 $AE=EN=x+1$ 。

师:你能找到直角三角形,用勾股定理建立方程吗?

生:在直角 $\triangle AFE$ 中, $AF^2 + FE^2 = AE^2$,
 $\therefore 3^2 + x^2 = (x+1)^2$ 。

分析: $\because$ 折叠, $\therefore \angle DNA = \angle ANE$, $AF=AD=3$,
 $\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle DNA = \angle NAE$, $\therefore \angle NAE = \angle ANE$,
 $\therefore AE=NE$ 。设 $EF=x$, 则 $AE=NE=x+1$, 在直角 $\triangle AFE$ 中, $AF^2 + FE^2 = AE^2$ 。
 $\therefore 3^2 + x^2 = (x+1)^2$ 。
解得 $x=4$, 即 $EF=4$ 。

小结:例3将矩形沿折痕进行折叠,我们从翻折产生的性质和背景图形的性质两方面入手,分析出了图中相等的线段和角,找到了等腰三角形和直角三角形,等腰三角形帮助我们z对同一个量从不同的角度表达两次,即“算两次”方程的核心思想,直角三角形中勾股定理是解决此类问题的有力工具,体现了数学中的几何问题代数化——数形结合。图形折叠变化多端,但万变不离其宗,只要掌握了解决问题的一般思路,定能将一道道难题破解,进一步加强学生解题信心。

3.4 例4

如图,长方形纸片ABCD中,M是AB上一点,BM=1,将△MBC沿MC折叠得到△MNC,连结DN。AB=4,AD=3,求△CDN的面积。

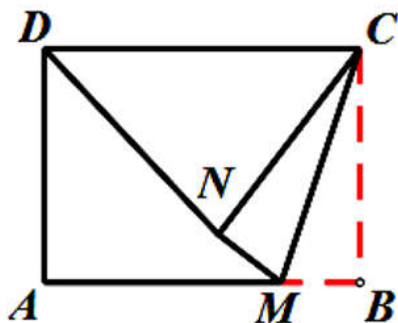


图6 例4长方形

师:观察图像,图中还有等腰三角形吗?

生:没有。

师:请小组合作,讨论并回答问题的解答方法。

生:我们可以延长MN、CD交于点E(如图7),则△EMC为等腰三角形。

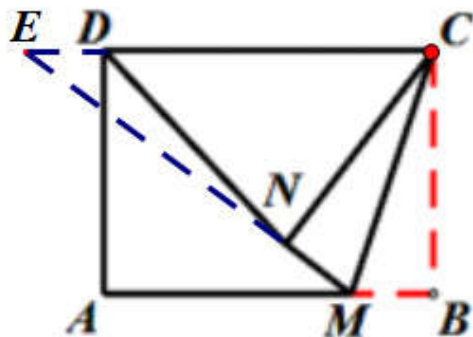


图7 辅助线图示

师:很好!非常漂亮的辅助线,帮助我们找到了隐藏着的等腰三角形。可以继续说说接下去的解答过程吗?

生:我们可以延长MN、CD交于点E,则△EMC为等腰三角形。要求△CDN的面积,只需求出CD边上的高即可。而△CDN中CD边上的高即为直角△CNE斜边上的高,所以我们设未知数表示出直角△CNE,利用勾股定理列出方程求解。

分析: ∵ 折叠, ∴ ∠BMC = ∠MNC, BM = MN = 1, ∠MNC = ∠B = 90°。 ∵ AB // CD, ∴ ∠ECM = ∠CMB。 ∴ ∠ECM = ∠CME, ∴ △EMC 为等腰三角形。

设 $EN = x$, 则 $EC = EM = x + 1$, 在直角△CNE中, $CN^2 + NE^2 = CE^2$, $\therefore 3^2 + x^2 = (x + 1)^2$ 解得 $x = 4$, 即 $EN = 4$, $EC = 5$ 。 ∴ 斜边上的高为 $\frac{12}{5}$, $\therefore S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$ 。

小结: 例4矩形折叠后点B既不在边上,也不在对角线上,D、N、M三点也不共线,很难找到解题的突破口,具有一定难度。但是有了前面的铺垫,学生有了找等腰、寻直角的意识,通过折叠、平行、代换得到∠ECM = ∠CME,添辅助线得等腰三角形就水到渠成。进而找到直角三角形勾股定理列方程求解也手到擒来。这个过程实际上就是对数学条件进行直观操作,发现隐藏,构建模型,是折叠操作有了“立体感”。

4 设计说明

矩形折叠问题在中考中频频出现,可以从折叠本质入手,充分利用折叠前后对应边、角之间的数量关系,构建模型,运用等腰三角形和直角三角形的相关知识,列方程巧妙求解。解决问题的基本步骤可以概括为“三步走”:

首先,从由折叠产生的轴对称图形和背景图形的性质入手,得到相等的线段、角,这些是解决问题的基本条件。

其次,根据这些基本条件,再结合几何中已有的基本模型,从而找到等腰三角形、直角三角形等特殊图形,这是解决问题的关键。

最后,在特殊图形中假设合适的未知数,运用方程思想,借助勾股定理是计算边长的常用方法。

几何问题由于图形的复杂多变,是初中数学的一个难点,而矩形折叠问题更是对学生思维和实践能力的综合考查,往往具有一定的难度。在教学中,教师充分引导学生了解折叠过程,准确把握折叠特性,并引导学生利用熟悉的基本几何模型,找等腰寻直角,将复杂的问题转化为熟悉的简单问题逐步解决,让学生经历问题的分析过程,培养数学思维方式,综合提升解题能力^[2]。同时,在提升学生解题能力的同时感受数学的魅力,提高学习数学的兴趣,加强学好数学的信心。

专题复习强调思想方法的归纳和能力的发展,通过引导学生总结图形折叠问题中包含的基本图形以及基本图形之间的联系,聚焦知识再生长,提炼通性通法,让学生不断完善折叠问题的知识链,感悟从一般到特殊,数形结合,化归等思想方法和习得抽象和推理论证的关键能力,提升学生在“数

形结合、分类讨论、逻辑推理、动态变化、数学运算、图形抽象与数学建模”等方面的数学核心素养。

参考文献

[1] 郇兴江,孙秀珍,马立锋.平移与翻折问题[J].《中学数学教学参

考》.陕西师范大学出版总社.2019.

[2] 陈志华,余莉.解决“图形折叠问题”的策略研究[J].《数学教学通讯》(中).2018.