教学方法创新与实践·第 02 卷·第 05 期·2019 年 09 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i5.2324

The Maximum Value Problem of Conic Curve

Zhensheng Xie　Pei Wang

School of Mathematics and Statistics, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China

Abstract

Analytic geometry, as the main test point of combining geometry, algebra and curve, is an important and difficult point in college entrance examination. This paper is devoted to exploring the characteristics of the maximum value problem of conic curve, summarizing the hotspot types and general solutions in the maximum value problems, so as to provide some methods for learning the knowledge of conic curve.

Keywords

conic curve; maximum value; high school mathematics; application

Fund Project

This project was funded by the High Level Talents Startup Project (G2018005) and the Guangxi Provincial Undergraduate Education Reform Project of Higher Education (2019JGB312).

圆锥曲线的最值问题

谢镇声　王培

玉林师范学院数学与统计学院，中国·广西 玉林 537000

摘　要

解析几何作为结合几何、代数和曲线的主要考点，是高考的重难点。本文致力于探寻圆锥曲线的最值问题的特点，总结最值问题中的热点类型与通用解法，为学习圆锥曲线的知识提供一些方法。

关键词

圆锥曲线；最值；高中数学；应用

基金项目

本课题获得高层次人才启动项目（G2018005）及广西高等教育本科教育改革工程（2019JGB312）资助。

1 引言

在高中，它的核心内容是圆锥曲线，圆锥曲线作为高考的核心考点，主要是对于学生逻辑思维能力、运算能力、空间想象力、分析问题与解决问题能力的综合考察。最值问题是圆锥曲线中的典型问题，其往往与函数、三角、不等式、向量、导数的知识相关，能较好的考查学生分析问题、解决问题的能力。因此，一直是高考中的热点内容。从近几年高考来看，对最值问题的考查主要有以下几种试题类型：距离与长度的最值、面积的最值、多个几何量运算结果的最值、最值条件下的参数值问题 [5]。

2 基本概念

2.1 圆锥曲线的定义

圆锥曲线，是由一平面截二次锥面得到的曲线。圆锥曲线包括椭圆（圆为椭圆的特例）、抛物线、双曲线 [7]。

圆锥曲线（二次曲线）的（不完整）统一定义：到定点（焦点）的距离与到定直线（准线）的距离的商是常数 e（离心率）的点的轨迹；当 $e>1$ 时，为双曲线的一支，当 $e=1$ 时，为抛物线，当 $0<e<1$ 时，为椭圆，当 $e=0$ 时，为一点 [7]。

2.1.1 椭圆的第一定义

平面内的动点到两个不同的定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$ 的动点 P 的轨迹叫做椭圆，其中定

点 F_1、F_2 称为椭圆的两个焦点，两焦点的距离 $|F_1F_2|$ 叫做椭圆的焦距 [1]。

其数学表达式为：$|PF_1|+|PF_2|=2a\left(2a>|F_1F_2|\right)$。

2.1.2 椭圆的第二定义

平面内的动点 P 到定点 $F\left(c,0\right)$ 的距离与到定直线 l：$x=\dfrac{a^2}{c}$（F 不在 l 上）的距离之比为常数 e，如果常数 $0<e<1$，则动点 P 轨迹是椭圆，其中定点 F 为椭圆的焦点，定直线 l 称为椭圆的准线。

2.1.3 椭圆的标准方程

在平面直角坐标系中，用方程来描述椭圆，椭圆的标准方程中的“标准”指的是椭圆的中心在原点，椭圆的对称轴为 x 轴和 y 轴两条坐标轴。

椭圆的标准方程有两种，取决于椭圆焦点所在的坐标轴：

（1）椭圆的焦点在 x 轴时，椭圆的标准方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$$

（2）椭圆的焦点在 y 轴时，椭圆的标准方程为：

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$$

2.2 抛物线

2.2.1 抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线，定点 F 不在定直线上 [1]。

2.2.2 抛物线的标准方程

以焦点 $F(\dfrac{p}{2},0)(p>0)$ 在 x 轴正半轴为例，抛物线的方程 $y^2=2px(p>0)$。

2.3 最值的定义

如果在函数定义域 I 内存在 x_0，使得对任意 $x\in I$ 总有 $f(x)\le f(x_0)(f(x)\ge f(x_0))$，则称 $f\left(x_0\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 I 上的最大值（最小值）。最大值和最小值统称为最值。

3 最值问题

圆锥曲线的内容在整个高中数学课程中占有相当重要的地位，对其的学习可以是学生进一步体会数形结合的思想，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，对圆锥曲线的考查也一直是高考数学中的热点话题。此外，圆锥曲线的定义、方程、几何性质在实际生产和科学技术中有着十分广泛的应用，为天文学、密码学等尖端领域提供了理论基础 [5]。一直以来，人们对圆锥曲线的研究从未间断过。

数学应用题是高考中必考的题型，随着高考改革的深入，同时课本上也出现了许多与圆锥曲线相关的实际应用问题，如桥梁的设计，探照灯反光镜的设计、声音探测，以及行星、人造卫星、彗星运动轨迹的计算等 [3]。涉及与圆锥曲线有关的应用问题的解决关键是建立坐标系，合理选择曲线模型，然后转化为相应的数学问题作出定量或定性分析与判断。在解决直线与圆锥曲线问题时，常会涉及到距离、面积的最值和直线或圆锥曲线中几何元素的最值以及这些元素存在最值时的有关问题。

求圆锥曲线中最值问题的常用方法：

（1）利用基本不等式求最值，注意若是利用均值不等式求最值，则应该满足两个量都是正数，其和或积至少有一个是定值，最后是取等号条件，即“一正、二定、三相等”原则。

（2）利用函数法，定义域内的一元二次函数的最值、区间内函数值的有界性以及三角函数包括正弦、余弦函数在定义域内函数值的有界性。

例 1：已知平面内点 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，两个不同的点 A，B 在抛物线上且处于 x 轴的两边，$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=2$（其中 O 是坐标原点），求 ΔABO 与 ΔAFO 面积的和的最小值为多少？

解：由题意可得 $F(\dfrac{1}{4},0)$，设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

则 $x_1=y_1^2,x_2=y_2^2$，设 $\angle AOB=\theta$。

由 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=y_1^2y_2^2+y_1y_2=2$

$\left(y_1y_2-1\right)\left(y_1y_2+2\right)=0$

由于两点 A，B 在抛物线上且处于 x 轴两边，不妨设 $y_1>0,y_2<0$，

所以 $y_1y_2=-2,y_2=-\dfrac{2}{y_1}$。

$$S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\theta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

教学方法创新与实践·第 02 卷·第 05 期·2019 年 09 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i5.2324

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|\bullet\sqrt{1-\frac{\left(\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\right)^2}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\bullet\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left(\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|=\frac{1}{2}\left|y_1^2y_2-y_2^2y_1\right|$$

$$=\left|y_1-y_2\right|=\left|y_1+\frac{2}{y_1}\right|=y_1+\frac{2}{y_1}$$

$$S_{\Delta AFO}=\frac{1}{2}\left|OF\right|\bullet y_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}y_1=\frac{1}{8}y_1$$

则 $S_{\Delta ABO}+S_{\Delta AFO}=\frac{9}{8}y_1+\frac{2}{y_1}\geq 2\sqrt{\frac{9}{8}y_1\times\frac{2}{y_1}}=3$

当且仅当 $\frac{9}{8}y_1=\frac{2}{y_1}$ 即 $y_1=\frac{4}{3}$ 时取“=”，

ΔABO 与 ΔAFO 面积和的最小值是 3。

例 2：在平面直角坐标系 xoy 中，点 $P\left(x,y\right)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一个动点，则 $S=x+y$ 的最大值是多少?

分析：利用设立参数把椭圆标准方程转化为参数方程，找出 x 和 y 与参数的关系，列出 x 和 y 用参数的表达式，再将表达式代入到椭圆的参数方程得到关于参数的三角函数，运用三角函数在定义域内具有最值，我们就能够得出题目所要求的最大值。

解：由题中得出椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

将椭圆化成参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），

故设动点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{3}\cos\varphi,\sin\varphi\right)$，其中 $0\leq\varphi<2\pi$，因此

$S=x+y=\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi)=2\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})$，

当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=1$，$2\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=2$

所以 $S=x+y$ 的最大值为 2。

点评：引进新的参数变量，将椭圆从标准方程转变成新的椭圆的参数方程，引进参数主要是方便找出不同变量间存在的关系，变与不变在满足一定的前提下是能够相互转换，本题通过引入参数，得到一个三角函数，再由三角函数的性质就可得到问题的答案。

4 结语

最值求解问题是贯穿整个高中数学的一类题目，圆锥曲线的最值问题通常以难题形式出现，通常有两种处理方法：一是几何方法；二是代数方法，此外还可能用到转化为二次函数、均值不等式、判别式、函数单调性、甚至导数求其最值[2]。通过逐步调整优化问题一步一步破解最值问题中产生的计算量大的问题[4]。要能针对具体问题找出合适的方法，从而使问题顺利求解[6]。像此类问题，它所涉及的知识点都是我们平时重要的基础知识，更要看清楚的是题中知识间的联系，及它们之间重新整合而产生的新的问题。因此还要求我们注重知识的灵活运用，摸索规律，善于总结。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部 . 高中选修 (B 版)1−1[M]. 北京 : 人民教育出版社 ,2013.
[2] 张红光 . 高中圆锥曲线的概念教学探究 [D]. 内蒙古师范大学 ,2015.
[3] 冯艳红 . 圆锥曲线教学策略研究 [D]. 内蒙古师范大学 ,2013.
[4] 黄寒凝 . 一类圆锥曲线最值问题的探究与突破策略 [J]. 福建基础教育研究 ,2019(02):41−44.
[5] 钱坤 . 新课改背景下圆锥曲线高考试题的考查特点分析 [D]. 赣南师范学院 ,2013.
[6] 任成竹 .APOS 理论下的圆锥曲线教学探究 [D]. 华中师范大学 ,2006.
[7] 阿波罗尼奥斯 . 圆锥曲线论 [M]. 陕西科学技术出版社 ,2007.