教学方法创新与实践 · 第 02 卷 · 第 07 期 · 2019 年 11 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i7.2530

Hierarchical Teaching of the Course "Optimization Method" ——Taking the Optimality Conditions of Constrained Optimization as an Example

Yiju Wang

School of Management, Qufu Normal University, Rizhao, Shandong, 276800, China

Abstract

For the "Optimization Method" course for postgraduate students majoring in operations research, starting from the optimality conditions of optimization problems, and based on the progressive relationship between the constraint qualifications of the optimality conditions of different forms of constrained optimization problems, the hierarchical teaching method of the course is established. It is expected that students can quickly master the core content of the course, gradually arouse the interest in the course step by step, and improve the classroom teaching effect of the course.

Keywords

optimization method; optimal condition; hierarchical teaching

《最优化方法》课程的层次化教学——以约束优化问题的最优性条件为例

王宜举

曲阜师范大学管理学院，中国 · 山东 日照 276800

摘　要

对运筹学专业研究生的《最优化方法》课程，我们从优化问题的最优性条件入手，基于不同形式的约束优化问题的最优性条件的约束规格之间的递进关系，建立了该门课程的层次教学法，以期学生能快速掌握该门课程的核心内容，逐步提高对这门课的学习兴趣，提高该课程的课堂教学效果。

关键词

最优化方法；最优性条件；层次教学法

1 引言

最优化方法，也称运筹学方法，主要运用严谨的数学方法并以计算机为工具，研究各种复杂系统中的最优化问题，为决策者提供科学决策的依据和解决方案，最终达到复杂系统的均衡与优化。它在图像识别、工程技术、交通运输、经济与管理、军事等方面有重要的应用，并在生产实际中发挥了重要作用。如线性优化及其单纯形法开创了数学用于解决经济问题的新纪元，投资组合优化开创了风险理论的先河，博弈论与 Nash 均衡奠定了信息经济学的基础。基于此，《最优化方法》成为运筹学专业及金融管理、交通运输、工程管理、生物医学、计算机技术等相关专业研究生的一门重要课程。世界各国也出版了不少这方面的研究生教材，如 [1–8]。《最优化方法》课程主要包括最优性理论与最优化算法。其中，最优性理论因其内容深奥复杂、结论证明繁琐而使不少教师在主讲这门课时发愁，更使不少学生在学习这门课程时有畏难情绪。针对这种情况，我们从优化问题的最优性条件入手，基于不同形式的约束优化问题的最优性条件的约束规格之间的递进关系，建立了《最优化方法》课程的层次教学法，以期使这门课的课堂教学由浅入深、层层递进，并使学生尽快掌握最优化理论与方法，使教学达到事半功倍的效果。

2 最优性条件的层次化教学

众所周知，约束优化问题的最优性条件是最优化理论的

核心。它主要通过目标函数和约束函数的梯度信息刻画最优化问题的最优解，在最优化算法的设计与理论分析中具有重要作用。因此，掌握好优化问题的最优性条件对《最优化方法》的课程学习至关重要。但优化问题的最优性条件种类繁多，证明过程复杂，从而使不少初学者对这门课产生畏难情绪。为此，我们有必要对不同形式下的最优性条件的约束规格之间的关联性进行条分缕析，给出这些约束规格一个清晰的层次结构。

一般地，约束优化问题的最优性条件是由简而繁建立的。也就是说，人们一般先建立等式约束优化问题的最优性条件，然后建立不等式约束优化问题的最优性条件，最后再折回分析某些特殊情形下的优化问题的最优性条件，如线性约束优化问题的最优性条件，凸规划问题的最优性条件等。具体地，对等式约束优化问题，在简单约束规格下，有如下最优性条件。

定理 1：（定理 7.1.3[4]）设 x^* 为光滑等式约束优化问题。

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\quad c_i(x)=0, i\in E \end{aligned}$$

的最优解。若向量组 $\nabla c_i(x^*), i\in E$ 线性无关，则存在向量 $\lambda^*\in R^{|E|}$ 使得

$$\nabla f(x^*)=\sum_{i\in E}\lambda_i^*\ \nabla c_i(x^*).$$

在上述结论中，条件"向量组 $\nabla c_i(x^*), i\in E$ 线性无关"称为约束规格，最后一式称为等式约束优化问题的最优性条件，又称 K−T 条件。对该最优性条件，引入 Lagrange 函数：

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i\in E}\lambda_i c_i(x).$$

则 K−T 条件可表示为：

$$\nabla_x L(x^*,\lambda^*)=0.$$

满足 KKT 条件的 (x^*,λ^*) 称为约束优化问题的 K−T 对，x^* 称为约束优化问题的 K−T 点，λ^* 称为约束优化问题在 x^* 点的最优 Lagrange 乘子。

显然，相比无约束优化问题，$\min\ f(x)$ 的最优性条件 $\nabla f(x^*)=0$，在等式约束优化问题的最优性条件中，目标函数的梯度换成了 Lagrange 函数的梯度。从无约束优化问题的最优性条件发展成约束优化问题的最优性条件是质的飞跃。该结论的创立人 Karush（1939）和 Kuhn、Tucker（1951）也因此成为最优化理论的奠基人。

在此基础上，我们考虑线性等式约束优化问题的最优性条件。考虑到约束函数的特殊性，其约束规格应当有所降低。实际上，对线性约束优化问题，无需任何约束规格，就可以保证上述最优性条件成立，也就是有如下结论。

定理 2：（推论 7.1.1）设 x^* 为线性等式约束优化问题。

$$\begin{aligned} &\min\quad f(x) \\ &s.t.\quad a_i^T x+b_i=0,\quad i\in E \end{aligned}$$

的最优解，则存在 $\lambda^*\in R^{|E|}$ 使得

$$\nabla f(x^*)=\sum_{i\in E}\lambda_i^*\nabla c_i(x^*).$$

建立完等式约束优化问题的最优性条件，即进入不等式约束优化问题的最优性条件的课堂教学。对此，考虑到等式约束优化问题的最优性条件所需的约束规格，可以猜测，要建立不等式约束优化问题的最优性条件，需要更强的条件。事实上，在 M−F 约束规格下，可以建立不等式约束优化问题的最优性条件。

定理 3：（定理 7.2.2[4]）设约束优化问题：

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ c_i(x)=0, i\in E \\ &\qquad c_i(x)\ge 0, i\in E \end{aligned}$$

在最优解 x^* 点满足 M−F 约束规格，即 $\nabla c_i(x^*), i\in E$ 线性无关，且存在非零向量 $s\in R^n$ 使得：

$$s^{\mathrm T}\nabla c_i(x^*)=0, i\in E,\ s^{\mathrm T}\nabla c_i(x^*)>0,\ i\in E(x^*)$$

则存在 Lagrange 乘子 λ^* 使得：

$$\begin{cases}\nabla f(x^*)=\sum\limits_{i\in E\cup I}\lambda_i^*\nabla c_i(x^*), \\ c_i(x^*)\ge 0,\ \lambda_i^*\ge 0,\ \lambda_i^* c_i(x^*)=0, i\in E.\end{cases}$$

教学方法创新与实践 · 第 02 卷 · 第 07 期 · 2019 年 11 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i7.2530

在该结论中，如果将不等式约束优化问题的不等式约束指标集置为空集，则定理 3 中定义的 M−F 约束规范退化为定理 1 中给出的线性无关约束规格。这说明，M−F 约束规格是线性无关约束规格的推广。

另外，相比定理 1 给出的等式约束优化问题的最优性条件，不等式约束优化问题的最优性条件相对复杂，它多了一个互补松弛条件，即不等式约束函数在最优值点满足：

$$c_i\left(x^*\right) \ge 0,\ \lambda_i^* \ge 0,\ \lambda_i^* c_i\left(x^*\right) = 0, i \in I.$$

显然，对不等式约束 $c_i\left(x\right) \ge 0$ 若在最优值点严格不等式成立，即 $c_i\left(x^*\right) > 0$ 则 Lagrange 乘子为零。这说明该约束在极小化目标函数的过程中不起作用。

与等式约束优化问题的最优性条件类似，要建立线性不等式约束优化问题的最优性条件，无需任何约束规格。

定理 4：（定理 7.2.1[4]）设 x^* 是线性约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ s.t.\ & a_i^{\mathrm{T}} x + b_i = 0, i \in E \\ & a_i^{\mathrm{T}} x + b_i \ge 0, i \in I \end{aligned}$$

的最优解。则存在向量 λ^* 使得

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^*\right) = \sum\limits_{i \in E \cup I} \lambda_i^* a_i, \\ \lambda_i^* \ge 0, a_i^T x^* + b_i \ge 0, \lambda_i^* \left(a_i^T x^* + b_i\right) = 0, \forall i \in I \\ a_i^T x^* + b_i = 0,\ \ \forall i \in E \end{cases}$$

结合定理 2，所有线性约束优化问题的最优性条件在最优值点自然成立。

最后，考虑凸规划问题的最优性条件。

对凸规划问题：

$$\min\left\{ f\left(x\right) | x \in \Omega \right\}$$

其中，$f: R^n \to R$ 为连续可微的凸函数，可行域 Ω 为非空闭凸集。

一般地，可行域 Ω 通过等式与不等式

$$c_i\left(x\right) = 0, i \in E;\ c_i\left(x\right) \ge 0,\ i \in I$$

来刻画。对此，要保证可行域为闭凸集，等式约束函数 $c_i\left(x\right), i \in E$ 应是线性函数，不等式约束函数 $c_i\left(x\right) = 0, i \in I$ 应是连续可微的凹函数。

相比一般的不等式约束优化问题，这里不但可行域具有特殊的结构，目标函数也很特殊。因此，有必要建立针对该问题的最优性条件的约束规格。对此，有如下结论。

定理 5：（定理 7.4.1[4]）对凸规划问题：

$$\begin{aligned} \min\ \ & f\left(x\right) \\ s.t.\ \ & c_i\left(x\right) = 0, i \in E \\ & c_i\left(x\right) \ge 0, i \in I \end{aligned}$$

若 Slater 约束规格成立，即存在可行点 $\bar{x}$ 使 $c_i\left(\bar{x}\right) > 0, i \in I$，则其最优值点为 K−T 点。

由定理 4，若凸规划问题的约束函数都是线性的，则无需任何约束规格就可建立凸规划问题的最优性条件。那么问题来了，如果凸规划问题的约束函数中既有线性函数也有非线性函数，其约束规格又是怎样的？对此，人们引入了弱 Slater 规格的定义。

定义 1：对凸规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & f\left(x\right) \\ s.t.\ & c_i\left(x\right) = 0, i \in E \\ & c_i\left(x\right) \ge 0, i \in I_1 \cup I_2 \end{aligned}$$

其中，$f: R^n \to R$ 为连续可微的凸函数，$c_i\left(x\right), i \in E \cup I_1$ 是线性函数，$c_i\left(x\right), i \in I_2$ 为非线性连续可微的凹函数，若存在可行点 $\bar{x}$ 使得

$$c_i\left(\bar{x}\right) > 0, i \in I_{2,}$$

则称该凸规划问题满足弱 Slater 约束规格。

相比 Slater 约束规格，弱 Slater 约束规格将线性不等式约束摈弃在外，因而约束规格得到极大削弱。

下面的结论告诉我们，在弱 Salter 约束规格下，K−T 条件成立。

定理 6：（定理 7.4.2[4]）在弱 Slater 约束规格下，凸规划问题的最优性条件成立。

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v2i7.2530

基于以上讨论，我们可建立不同形式下的约束优化问题的最优性条件的约束规格之间的关联图，见图 1。由该图可以清晰地看出，不等式约束优化问题的约束规格是最复杂的，其次是等式约束优化问题的约束规格和凸规划问题的约束规格。而要建立线性约束优化问题的最优性条件，无需任何约束规格。

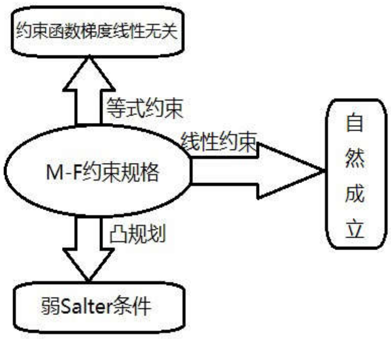

图 1 约束优化问题约束规格关联图

3 结语

本文通过对最优化问题的最优性条件的约束规格的分析，建立了该问题的一个层次递进结构。这不但有助于主讲教师的课程教学，而且也有助于学生对最优化问题最优性条件的理解和掌握。当然，要能做到这一点，主讲教师要对教学内容有全面透彻的理解。实际上，对《最优化方法》课程中的很多问题，都可以像最优化问题的最优性条件的约束规格那样由简到繁、由浅入深、层层剖析，建立它们之间的递进关系图，这有助于《最优化方法》课程教学质量的提高。

参考文献

[1] 袁亚湘 . 非线性最优化数值方法 , 上海科学技术出版社 ,1993.

[2] 倪勤 . 最优化方法与程序设计 , 科学出版社 ,2009.

[3] 陈宝林 . 最优化理论与方法 , 清华大学出版社 ,1989.

[4] 王宜举 , 修乃华 . 非线性最优化理论与方法 . 科学出版社 ,2012.

[5] Bazaraa MS,Sherali HD,Shetty CM.Nonlinear Programming Theory and Algorithms.John Wiley and Sons,New York,1993.

[6] Bertsekas DP.Nonlinear Programming.Athena Scientific,1999.

[7] Nocedal J,Wright SJ.Numerical Optimization.Springer Press,1999.

[8] Boyd S,Vandenberghe L.Convex Optimization.Cambridge University Press,2004.