

Junior High School Mathematics: A Dialectical Thinking Class Based on Modeling——Exploring Dialectical Thinking “Multiplication of Rational Numbers” Class Snippet

Bing Yang

Hangzhou Qingtai Experimental School, Hangzhou, Zhejiang, 310000, China

Abstract

This paper makes a comparative study on the five versions of the teaching materials at home and abroad by means of the methods of literature, investigation and so on. An attempt is made to model as a carrier for teaching, and a relatively representative teaching design case is proposed, which is better for students to understand the teaching difficulty of the “negative negative positive”. Attempt to use modeling as a carrier for teaching, and propose a relatively representative teaching design case, so that students can better understand the teaching difficulty of “two negatives make a positive”.

Keywords

rational number multiplication; textbook comparison; modeling; two negatives make a positive

初中数学：以建模为载体的审辩式思维课堂——探索审辩式思维“有理数的乘法”课堂片段

杨冰

杭州市清泰实验学校，中国·浙江杭州 310000

摘要

本文采用文献法、调查法等研究方法，对有理数乘法一课在国际上五个版本的教材进行对比研究。尝试以建模为载体进行教学，并提出一个相对具有代表性的教学设计案例，更好地让学生理解“负负得正”这一教学难点。

关键词

有理数乘法；教材对比；建模；负负得正

1 教材分析

七年级学生在小学阶段对非负有理数范围内乘法运算已经有了充分的理解与认识。课本对有理数的乘法的教学目标之一就是回顾小学所学的数的乘法，经历法则发生的过程。而在法则教学中，由于在日常生活中很少有学生容易理解“负负得正”的实例，故如何让学生理解“负负得正”，既是学生学习的难点也是对老师的考验，学生常常会产生质疑。著名的水稻专家袁隆平院士曾说：“我最喜欢外语、地理、化学，最不喜欢数学，因为在学正负数的时候，我搞不清为什么负负得正，就去问老师，老师说：‘你记住就是’。笔者由此得出结论：数学不讲道理，于是不再理会，学数学兴趣一直不大，成绩不好。”^[1]袁隆平院士在课堂上提出了对“负负得正”

这一命题的质疑，但老师并没有遵循审辩式思维的方式对学生进行引导，所以简单的死记硬背对学生数学的学习不但没有正面的作用，还会产生负面的影响。带着这个问题，笔者参阅新加坡数学教材，这个在历次的国际数学与科学评价项目TIMS中，中学生表现一直位居前列的国家能否有更好的诠释。笔者发现它对于“负负得正”的教学，采用了建模的思想，于是在课堂中，尝试着以这样的方式让学生理解负负得正这一法则。

2 教学目标

- (1) 回顾小学所学数的乘法，经历乘法法则发生的过程。
- (2) 掌握有理数的乘法法则。

- (3) 会运用乘法法则求若干个有理数相乘的积。
- (4) 理解倒数的概念。

3 教学过程

本课教学过程主要分为四个部分，复习引入，初步探索，再探新知，巩固提升以及小结。下面以流程图的形式呈现各环节具体过程：



在复习引入环节，将分为以下四步，引导学生回忆研究法则运算的方法。具体环节如下图：



第二环节中，将对正数乘负数的情况进行研究，在第三环节研究负负得正时也使用这一流程，第一次探索时作为体验，第二次采用小组合作的方式来进行对辩证式思维的练习。



4 片段解析

片段一：

(1) 复习引入，回顾旧知

师：同学们，前面我研究了有理数的什么运算？

齐答：有理数的加减。

师：说说你是怎么理解有理数加法的？

生：有理数的加法可以分为“正数 + 正数，正数 + 0，负

数 + 0，负数 + 负数”。

生：有理数相加、要先确定结果的符号，再确定结果的绝对值。

师：他们是怎样确定的？

生：同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，再用较大数的绝对值减较小数的绝对值。

师：那减法呢？

生：转化为加法。

师：我们研究了有理数的加减，按照小学里的经验，接下来该研究什么？

齐答：有理数的乘除。

师：今天这节课，我们就一起来学习有理数的乘法。

师：类比有理数的加法，引入负数后，乘法运算会出现哪些情况？

生：正数 × 正数，正数 × 负数，正数 × 0，负数 × 0。

生：还有负数 × 负数。

片段二：

(2) 初步探索

出示 PPT

$$3 \times 3 = 3 \times 2 = 3 \times 1 = 3 \times 0 =$$

师：上面的式子你会算吗？

继续出示 PPT

$$3 \times (-1) = 3 \times (-2) = 3 \times (-3) =$$

你能猜想出计算结果吗？你是怎么想的？

学生基本有以下三种思路：

生 1：按照上面算式，因数减少 1，结果就减少 3，那 $3 \times (-1)$ 应该比 0 小 3，应该是 -3。

师：谁能解释一下吗？

生 2：我能解释这种规律 $3 \times (-1)$ 可以看做 3 个 -1 加， $(-1) + (-1) + (-1) = -3$ 。

生 3：我还发现因数变成相反数，结果也变成它的相反数。

片段三：

(3) 再探新知

提出质疑 师：最后我们再来研究下两个负数相乘的情况。

生 1：负负得正（生迫不及待喊出结果）。

生2: 为什么负负就得正啊?

合作探究: 师: 太好了, 你已经学会质疑了! 那我们就一起来研究一下吧. 请观察下面的式子, 你能猜想出计算结果吗? 你是怎样想的?

PPT 呈现

$$\begin{aligned}
 3 \times 3 &= 9 \\
 3 \times 2 &= 6 \\
 3 \times 1 &= 3 \\
 3 \times 0 &= 0 \quad (-3) \times 0 = \\
 3 \times (-1) &= -3 \quad (-3) \times (-1) = \\
 3 \times (-2) &= -6 \quad (-3) \times (-2) = \\
 3 \times (-3) &= -9 \quad (-3) \times (-3) =
 \end{aligned}$$

小组合作

思考要求:

- (1) 请猜想出计算结果.
- (2) 你是怎样得到猜想的? 可以解释吗?
- (3) 小组整理思路准备汇报.

小组1: 我们组是这样想的: 由前两组算式的规律发现: 前面的因数是3的时候, 第二个因数减少1, 积就减少3. 所以当前面的因数是-3的时候, 第二个因数由0减少为(-1)时, 积就相反的增加3, 即 $(-3) \times (-1) = 0 - 3 = -3$; 同法可以得出其他几个算式的结果.

Handwritten work showing the following equations and annotations:

- $3 \times (-1) = -3$ (with arrows pointing down from 3 to -3 labeled '减少1' and from -1 to -3 labeled '减少3')
- $3 \times (-2) = -6$ (with arrows pointing down from 3 to -6 labeled '减少1' and from -2 to -6 labeled '减少3')
- $3 \times (-3) = -9$
- $(-3) \times 0 = 0$ (with arrows pointing down from -3 to 0 labeled '减少1' and from 0 to 0 labeled '增加3')
- $(-3) \times (-1) = 3$ (with arrows pointing down from -3 to 3 labeled '减少1' and from -1 to 3 labeled '增加3')
- $(-3) \times (-2) = 6$ (with arrows pointing down from -3 to 6 labeled '减少1' and from -2 to 6 labeled '增加3')

A red bracket underlines the equations $(-3) \times (-1) = 3$ and $(-3) \times (-2) = 6$, with the label '相反数' (opposite number) written below it.

(学生展示图1)

小组2: 我们组可以解释, 我知道在一个数的前面添上一个“负”号, 就表示那个数的相反数, 因此, 由前面的发现可知 $(-3) \times 4 = -12$, 若把因数中的4替换成它的相反数-4, 那它的积也应该变成原来积的相反数, 也就是

$(-3) \times (-4) = -(-12) = 12$, 其他类推.

Handwritten work showing the following equations and annotations:

- $3 \times 3 = 9$ (with arrows pointing down from 3 to 3 labeled '相反数')
- $3 \times (-1) = -3$ (with arrows pointing down from 3 to -3 labeled '相反数')
- $-3 \times (-1) = -(-3) = 3$ (with arrows pointing down from -3 to 3 labeled '相反数')

(学生展示图2)

师: 同学们认为这一组的解释是否合理?

生: 对呀, 结果一样啊! 合理……

师: 老师也认为是合理的, 它利用了相反数的意义作出了解释, 说明这位同学敢于破常规, 敢于说出自己的想法, 很值得我们学习.

归纳结论: 现在你能归纳出刚才我们研究的正数乘以负数, 负数乘以负数的计算规则吗?

生: 正数乘以负数得负数, 负数乘以负数得正数.

师: 老师有个问题, 请你回答: 根据你的描述我写一个式子; $(-6) \times 3 = -18$ 行吗? 一个有理数有几部分组成?

生: 噢, 刚才只说了符号, 还需要一部分, 这一部分就是小学的运算.

师: 小学学的数不带符号, 其实就是“非负数”, 非负数是容易想到什么的? 该如何表述?

生: 明白了, 正数乘以负数得负数, 并且得数的符号后面的数就是两个因数的绝对值相乘得到的; 同样, 负数乘以负数得正, 得数符号后面的数等于两个因数绝对值的积.

师: 根据你对有理数乘法的思考, 总结填空:

PPT 呈现

根据你对有理数乘法的思考, 总结填空:

正数乘正数积为__数; 负数乘正数积为__数;

正数乘负数积为__数; 负数乘负数积为__数;

乘积的绝对值等于各乘数绝对值的__.

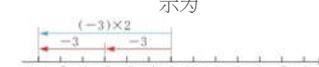
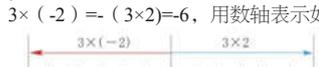
正数乘以0得__; 负数乘以0得__;

0乘以0得__.

5 教学片段及审辩思维设计说明

教学片段	审辩式思维设计说明 (设计意图)	教学效果分析
片段一: 1. 复习之前所学的有理数的运算的知识及学方法。	基于学生的“已有认知”, 引导学生观察、发现算式的规律。目的在复习回顾旧知的同时, 也为新知的获取做好准备, 利用已知的学习经验来解决现有问题。这一环节是为后续研究“负负得正”这一命题的准备阶段。再复习知识的同时, 也复习研究计算法则的一般方法。	学生能较好地回顾前两课所学的知识, 并且在后续环节中能看出本环节的设计能很好地复习计算法则的一般方法。
片段二: 2. 通过研究同号两数相乘猜想异号两数相乘的规律。通过已学知识的经验尝试寻找验证的方法, 最后讨论得到证明。	此处让学生通过建模解决问题的过程, 学生体验审辩式思维的过程。小学中经常会把找到的规律直接当成结果来运用, 这种处理只是让学生的思维停留较低的层级。并且会误以为所见即所得, 不求思辩。这是不科学也是不利于学生思维发展的, 只有经历了质疑验证到推广, 才能在思维上得到更高的提升, 并且学会用数学的方式来解决数学问题。	学生能根据预设的情境合理的猜想出计算的结果, 并提出质疑。通过讨论尝试得到验证的方法。
教学片段	审辩式思维设计说明 (设计意图)	教学效果分析
片段三: 3. 利用上一题的方法尝试猜想异号两数相乘的结果, 并自己尝试验证结果。	在前面对异号两数相乘的研究上, 学生在引导下已经初步体验了建模解决问题的过程, 在“负负得正”这个问题的解决上就显得相对轻松。此环节作为审辩式思维的渗透练习。学生在自主合作的环节中再次经历猜想、质疑、归纳、验证的过程。	学生能用找规律的方法进行猜想, 进而尝试着用相反数的模型来进行解释, 最后在表格的引导下, 将自己的思考转化为一种推广, 无形中让他们对建模解决问题有了再一次的认识和体验。

在本节课的教学中, 尤其是对负负得正的教学中, 笔者花了较多的时间在寻找好的解决方案。笔者对比了五个版本的教材, 其中国内三版, 国外两版, 具体内容如下表:

人教版	北师大版	浙教版
<p>(1) 观察: $3 \times 3 = 9, 3 \times 2 = 6, 3 \times 1 = 3, 3 \times 0 = 0$,) 发现规律: 随着前一乘数逐次递减 1, 积逐次递减 3, 得到 $3 \times (-1) = -3, 3 \times (-2) = -6, 3 \times (-3) = -9$</p> <p>(2) 观察: $3 \times 3 = 9, 2 \times 3 = 6, 1 \times 3 = 3, 0 \times 3 = 0$, 发现规律: 随着前一乘数逐次递减 1, 积逐次递减 3, 得到 $(-1) \times 3 = -3, (-2) \times 3 = -6, (-3) \times 3 = -9$.</p> <p>(3) 观察上述算式, 根据规律得到, $(-3) \times (-1) = 3, (-3) \times (-2) = 6, (-3) \times (-3) = 9$.</p>	<p>(1) 甲水库的水位每天升高 3cm, 乙水库的水位每天下降 3cm. 4 天后甲、乙水库水位总变化量各是多少?</p> <p>如果用正号表示水位上升, 用负号表示水位下降, 那么 4 天后甲水库的水位变化量为 $3+3+3+3=3 \times 4=12$, 乙水库的水位变化量为 $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = (-3) \times 4 = -12$.</p> <p>(2) 观察: $(-3) \times 4 = -12, (-3) \times 3 = -9, (-3) \times 2 = -6, (-3) \times 1 = -3, (-3) \times 0 = 0$, 发现规律: 一个因数减小 1 时, 积增加 3, 得到 $(-3) \times (-1) = 3, (-3) \times (-2) = 6, (-3) \times (-3) = 9, (-3) \times (-4) = 12$.</p>	<p>图中显示的是位于三峡白鹤梁的用做水位测量标志的线刻石鱼。假设水位按每小时 3 厘米的速度下降, 经 2 小时后水位下降多少厘米?</p> <p>由小学里学过的乘法的意义, 有 $3 \times 2 = 3 + 3 = 6$ 用数轴表示为</p>  <p>相应地, $(-3) \times 2 = (-3) + (-3) = -6$. 用数轴表示为</p>  <p>我们发现, 当我们改变相乘两数中一个数的符号时, 其积就变为原来的相反数. 例如, $(-3) \times 2 = -(3 \times 2)$.</p> <p>同样, $3 \times (-2)$ 的积也应是 3×2 的积的相反数, 即 $3 \times (-2) = -(3 \times 2) = -6$, 用数轴表示如图</p> 

国内教材多从实际情境出发, 通过归纳模型或是相反数模型来得到结果, 其中浙教版还结合数轴进行解释, 体现了数形结合的思想。

那国外教材又是如何诠释的呢? 笔者翻阅两本教材进行分析, 具体方式如下表:

教材版本	使用的模型
新加坡版、美国加州 3	归纳模型、相反数模型

新加坡版先用归纳模型得到猜想, 再用相反数模型进行验证, 而美国加州 3 版本先用相反数模型得到猜想, 再用归纳模型进行验证。

笔者反思, 在负负得正的教学中能否尝试使用建模的方式, 从猜想, 质疑, 归纳, 到验证, 使学生在解决数学问题的过程中经历得到完整的体验, 也让学生的思维从低层次的思维逐步上升到高阶思维, 从而在思维上得到锻炼。

参考文献

- [1] 谢红英, 刘超. 中外初中数学教材中“负负得正”内容的比较研究 [J]. 中学数学, 2013, (8).