DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i1.3142

Create Inquiry Activities to Clarify Mapping Principles——A Case Study of Thinking Level in Junior Middle School Mathematics Example Learning "Drawing of Ruler and Gauge of Corner Bisection Line"

Jiaqi Zhang

Hangzhou Huixing Middle School, Hangzhou, Zhejiang, 310002, China

Abstract

The teaching case takes the ruler drawing of the angular bisection line as the starting point, in order to master the drawing method and the drawing principle of the angular bisection line, and to cultivate the students' logical reasoning ability. On this basis, the diagonal bisection line and ruler drawing are studied to explore its positive role in developing students' innovative thinking and promoting the deepening and promotion of thinking level.

Keywords

ruler drawing; angular bisection line; thinking level; teaching case

创设探究活动 明晰作图原理——初中数学例题学习“角平分线的尺规作图”思维层级案例

张佳琪

杭州市惠兴中学，中国· 浙江 杭州 310002

摘 要

该教学案例以角平分线的尺规作图为起点，旨在掌握角平分线的尺规作图方法及其作图原理，培养学生的逻辑推理能力。本文在此基础上对角平分线和尺规作图展开拓展研究，探究其对于开发学生创新性思维，推动思维层级深入与提升的积极作用。

关键词

尺规作图；角平分线；思维层级；教学案例

1 引言

布鲁姆将认知领域目标分为六个层次，由低到高分别为识记、理解、应用、分析、评价、创造。为促进学生思维层次深入发展，提高数学能力和逻辑水平，在课堂教学中需要引导学生经历探究发现、分析问题、发散创造的过程，以下就“角平分线的尺规作图”的例题学习过程，从探究作图方法、明晰作图原理、迁移拓展经验三个角度，谈谈笔者对课堂教学中学生思维层级提升的看法。

2 教学环节及思维层级设计说明

2.1 动手操作，体验角平分线的作法

教师：作一个已知角的平分线，可以采取哪些方法？（学生动手尝试并反馈）

学生 1：采用折纸法，用纸片剪出已知角后进行对折，所得折痕即角平分线。

学生 2：采用度量法，用量角器测量已知角，继而通过计算已知角度数的，可得到角平分线。

学生 3：采用尺规作图的方法。

教师：学生 1 和学生 2 分别采用了折纸法和度量法，都可以顺利得找到已知角的角平分线，下面我们重点探究尺规作图法。

介绍尺规作图概念：在几何作图中，把用没有刻度的直尺和圆规作图，简称尺规作图。强调其中的“尺”只能用于画直线，不能进行长度测量。相较折纸法和度量法，尺规作

教学方法创新与实践 · 第 03 卷 · 第 01 期 · 2020 年 01 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i1.3142

图结果更加精确客观，有效避免了视觉和测量误差。[1]

在学生了解尺规作图概念的基础上呈现例题。

例题：已知∠*BAC*（如图 1），用直尺和圆规作∠*BAC*的平分线*AD*，并说出该作法正确的理由。

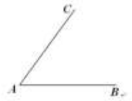


图 1

【设计意图】导入活动以作角平分线的操作性体验展开，激发学习兴趣，使学生思维迅速进入积极状态。同时通过调动学生的已有知识熟悉角平分线的作法，低起点展开教学探究，提高学生自信心。

2.2 分析推理，掌握角平分线的作法

2.2.1 教学片段一

通过展示欧几里得的《几何原本》追溯角平分线作法的历史起源，针对《几何原本》中的原始命题“二等分一个给定的直线角”，给出书中所示角平分线的作法：（如图 2 所示）在 *AB* 上取点 *E*，用圆规在 *AC* 上截取 *AF*=*AE*；连结 *EF*，作等边△ *DEF*；过点 *A*,*D* 作射线 *AD*，射线即为∠ *BAC* 的平分线。

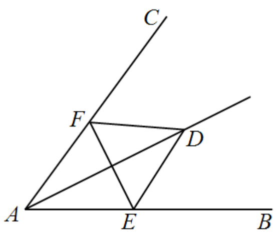


图 2

教师：针对上述角平分线的作法，如何说明射线 *AD* 就是∠ *BAC* 的角平分线。

学生：由作法知，*AF*=*AE*，*DF*=*DE* 再结合公共边 *AD*，根据三角形全等的判定方法“*SSS*”可证得△ *ADF* ≌△ *ADE*，利用全等三角形对应角相等的性质得∠ *CAD*= ∠ *BAD*，即射线 *AD* 是∠ *BAC* 的角平分线。[2]

教师：《几何原本》中角平分线的作法其实是教材中角平分线尺规作图法的一种特殊情况，通过上述证明过程我们可以发现作出角平分线的关键是什么？射线 *AD* 平分∠ *BAC* 的原理是什么？

学生 1：作图过程中可以弱化原始作法中等边三角形的条件，满足 *AD*=*AE*，*DF*=*DE* 即可证明△ *ADF* ≌△ *ADE*，由此证得角平分线。

学生 2：在作图截取 *DF*=*DE* 时，必须保证两条圆弧有交点。

教师：那么在作圆弧过程中，半径选取怎样的长度比较合适呢？

学生：分别以 *E*,*F* 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长度为半径，截取 *DF*=*DE*。

师生一起总结角平分线尺规作图的完整作法，板演作图（如图 3 所示）并让学生按步骤独立完成作图，强调在题目没有做出特别要求的情况下，尺规作图不要求写出作法，但必须保留作图痕迹和作图结论。

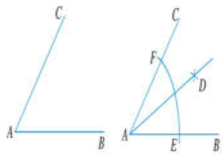


图 3

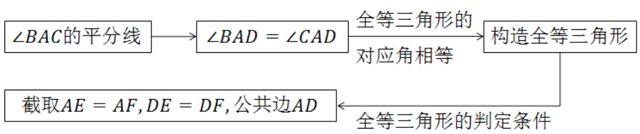
【设计意图】引入尺规作角平分线的历史起源，将相关数学史内容融入日常教学中，意在让学生感受知识的发生发展过程，推动学生思维进入有序状态。借助《几何原本》中特殊化的角平分线作法，让学生通过弱化条件观察发现角平分线的尺规作图法需要满足的本质条件，培养学生特殊到一般的归纳推理能力。

作已知角的角平分线是学生首次接触尺规作图，通过强调圆弧半径的长度要求，以及完整作法的总结，使尺规作图的学习过程更加严谨，体现思维的严密性，也为后续推进几种基本作图的学习提供经验。

2.2.2 教学片段二

作∠ *BAC* 的平分线 *AD*，即作出∠ *BAD*= ∠ *CAD*. 根据全等三角形对应角相等的性质，启发我们通过构造一对全等三角形，使∠ *BAD* 和∠ *CAD* 成为这对全等三角形的对应角。分析全等三角形的判定条件即需要构造相等的角或相等的边，考虑到尺规的作用，只要在边 *AD*,*AC* 上分别截取线段 *AE*,*AF*，使 *AE*=*AF*，然后分别以 *E*,*F* 为端点，另一个端点公共，作两条相等的线段，就能作出一对符合要求的全等三角形。

作法的分析思考过程简要概括如下：



DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i1.3142

以上分析过程均可以通过直尺和圆规完成作图，并且将分析过程逆向推导即可证明所作射线就是已知角的平分线。[3]

后续教学参照教学片段一明确角平分线尺规作图的作法，强调作图细节要求 .

【设计意图】从角平分线的基本概念着手，将角平分线的作图问题转化为构造全等三角形的问题，再结合全等三角形的性质与判定知识分析推理作法，整个推理过程采用逆向思维，培养学生的分析能力和转化能力，同时从梳理解题思路到形成尺规作图方法，实现了思维形成及加工过程的可视化。

【评析】上述两个教学片段从不同角度展开角平分线作法的学习，片段一借助数学史直接给出角平分线的作法，在此基础上进行证明，说明作法的合理性，侧重于对角平分线作法的理解，以及对三角形全等判定方法的应用 . 而片段二侧重于角平分线作图的分析过程，相比之下，更加注重学生思维的发生发展过程，促进学生的思维水平纵向深入。

2.3 延伸探究，感悟角平分线的拓展

2.3.1 变式一：如何作一个角 n 的等分角？

掌握角平分线的尺规作图法后，学生容易进行四等分角、八等分角等将角等分成偶数份的操作 . 那么，我们能够通过尺规作图作出三等分角吗？介绍将角奇数等分的操作无法通过尺规作图完成 .

【设计意图】拓展性的问题情境，既联系着本节教学内容，又将当前教学过程中应当解决的问题深挖、拓宽，让学生在课外利用已有的操作经验独立思考解决，有利于培养学生循着课堂探究模式继续深入思考的习惯，巩固内化本节学习中蕴含的思想方法。由角的二等分到等分是思维的自然发展路径，推动学生思维的延伸性，培养自主学习能力，推动学生思维地进一步发生创造与升华。

2.3.2 变式二：如何作一个平角的角平分线？

如图 4 所示，在直线 AB 取点 C 作出平角∠ ACB，根据角平分线尺规作图的步骤，作∠ ACB 的平分线 CF。

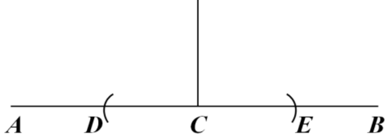


图 4

思考：此时直线 AB 和射线 CF 存在怎样的位置关系？（$AB \perp CF$）

【设计意图】在掌握角平分线尺规作图的基础上，将角特殊化，一则巩固特殊情况下的尺规作图步骤，二则作平角角平分线的本质与“过一点作已知直线的垂线”以及“作一条线段的垂直平分线”的作图方法类似，此处通过观察直线 AB 和射线 CF 的位置关系，为后续进一步学习基本作图提供知识生长点。同时启发学生发现新旧知识的联结，体会数学学习的整体统一性，完善学生的知识结构与思维体系。

2.3.3 变式三：还有哪些方法可以作出一个角的平分线？

回顾教学片段二中作角平分线方法的分析过程，将作角平分线转化为构造全等三角形，那么能否利用不同的判定方法构造出新的全等三角形呢？[4]

在进一步学习全等三角形判定方法的基础上，自主探究利用刻度尺、圆规等不同的作图工具作已知角平分线的方法，合作交流说明这些作法的正确性 . 下面列举三种典型作法。

作法 1：只用直尺作角平分线（如图 5 所示）

（1）将直尺一端紧贴边 AB，另一端作直线 EF；

（2）同步骤（1），将直尺一端紧贴边 AC，另一端作直线 GH，与直线 EF 交于点 D；

（3）过点 A,D 作射线 AD，则射线 AD 就是∠ BAC 的平分线。

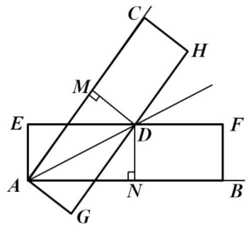


图 5

根据“平行线间距离的处处相等”可得 $DM=DN$，由此结合三角形全等的判定证得射线 AD 是∠ BAC 的平分线 . 同时这一证明过程也为角平分线性质逆定理的证明奠定基础。

作法 2：如图 6 所示

（1）在边 AB,AC 上分别截取 AE,AF 线段，使 $AE=AF$；

（2）连结 EF，取 EF 的中点 D；

（3）过点 A,D 作射线 AD，则射线 AD 就是∠ BAC 的平分线。

教学方法创新与实践·第 03 卷·第 01 期·2020 年 01 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i1.3142

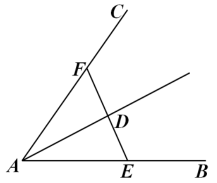


图 6

分析该作法可得结论 $DE=DF$, $\angle EAD=\angle FAD$, $AD\perp EF$，由此进一步得出等腰三角形的三线合一性质以及轴对称性。

作法 3：如图 7 所示

（1）在边 AB,AC 上分别截取线段 AE,AF，使 $AE=AF$；

（2）过点 E 作 $EH\perp AB$，过点 F 作 $FG\perp AC$，交 EH 于点 D；

（3）过点 A,D 作射线 AD，则射线 AD 就是 $\angle BAC$ 的平分线。

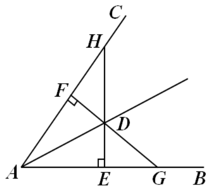


图 7

该作法的证明过程中可以得到 $DE=DF$，由此可以推导出角平分线的性质。

【设计意图】通过探究不同种角平分线的作法，“创造”出有关角平分线的多种模型结构，并且在证明过程中可以衍生出其他相关的性质定理，与后续知识产生联结点，进一步架构学生的思维体系。

学生讲解作图方法和证明思路的过程，是总结和反思所学知识以及解题方法的良好契机，引导学生展示思维过程，有利于培养学生反思交流的能力，调动学生的学习热情。同时，借助集体的创造力对学生可能遗留的部分知识及思维漏洞进行调整，使学生的思维更加精准完善。

3 思维层级提升的课堂教学思考

3.1 明确作图原理，严密思维逻辑

课标中对初中阶段尺规作图的要求包括：第一，能用尺规完成基本作图并会利用基本作图完成部分作图情境；第二，了解尺规作图的道理。“作一个角的平分线”作为五种基本作图之一，教学过程中不仅要让学生清楚掌握尺规作图的每一步骤，明确“怎么作”，还要让学生知道“为什么这样做？”“如何想到这样做？”[5]

在本例中，根据全等三角形的性质与判定，证明角平分线作法的正确性，让学生充分感受逆向分析和转化思想；除了明确尺规作图的要求，在本例教学中通过让学生阐述作图方法和分析证明过程，帮助学生理清思路，明确作图原理，促使学生的思维逻辑更加严密，同时养成总结反思的习惯。

3.2 加强自主探究，开放思维架构

学生是课堂的主体，课堂教学中应避免出现灌输式教学现象，赋予学生充分表达个人观点，呈现自身思维活动的机会. 开放式情境下的自主探究学习可以让学生经历发现、提出、解决问题的完整过程，在探究学习和合作交流中感受知识的发生发展过程，既有利于强化学生对数学知识及其内涵本质的深入认知，又能使学生获得创造性活动的经验，培养数学学习的思维方式和内在素养。[6]

在本例中，以角平分线的作法开篇导入，以学生熟知的操作型活动低起点展开尺规作图的探究，又以角平分线作法的开放型探究结尾，在明确角平分线的尺规作图法及其原理的基础上，充分发散思维，让学生进行自主探究，基于尺规作图分析过程中形成的操作经验和思维经验，发散思维，探究不同的作图方法和作图原理，对思维过程和思维方法进行再认知再创造，利于开发学生的创造性思维。

3.3 强化知识联结，完善思维体系

发现知识联结是架构数学体系的重要方法，在学习探究过程中，通过已学知识积累数学活动经验，有利于学生针对新情境、新知识进行知识迁移，为高效化的数学探究奠定基础。发现并建立新旧知识间的联系点，有利于学生整体思维的系统化整合，进一步推动思维层级的深入与提升。[7]

在本例中，我们通过拓展探究，发现角平分线尺规作图和中垂线、等腰三角形性质之间的联系，为后续学习做好铺垫，推动学生思维的延伸发展。同时，通过发现知识间的相关性与共通性展开新知学习，是重要的数学学习方式之一，教学过程中让学生经常性地感悟知识联结，有利于提高学生的自主学习能力 .

4 总结与反思

角平分线的尺规作图，既是对全等三角形知识的应用，

也为后续基本作图以及三角形性质的学习做好铺垫，对此课标提出掌握作图方法和明确作图原理的要求。为实现促进学生掌握知识内容和发展学生思维的双重目标，课堂教学环节从探究活动和阐述原理两个方向展开，从学生的已有经验展开动手探究，明确角平分线的尺规作图方法和原理，再此基础上围绕作图和说理展开知识的迁移与变式，采用开放探究、小组合作的形式，在思考、交流、呈现的过程中发现问题、解决问题、归纳结果，促进学生思维碰撞，培养学生发散性思维和创造性思维。

参考文献

[1] 田鹏 . 迁移数学经验　优化课堂探究——以“角平分线”一课的教学为例 [J]. 中学数学教学参考 ,2018(09):16-17.

[2] 孙智文 . 尺规作图对初中生逻辑推理素养培养和评价的研究 [D]. 苏州大学 ,2017.

[3] 王小林 . 从被动到自主 , 让“尺规作图”走向“低耗高效”——由一道试题引发的思考 [J]. 数学教学通讯 ,2014(16):15-16.

[4] 胡李萍 . 浅析尺规作图对提高学生创新力的重要性 [J]. 数学学习与研究 ,2014(08):106.

[5] 郭海云 . 新课程标准下的尺规作图问题 [D]. 西北大学 ,2013.

[6] 高波 . 明理得法　水到渠成——以“作一个角的平分线”为例浅析初中尺规作图教学 [J]. 中学数学 ,2013(02):18-20.

[7] 肖霄 . 对初中阶段尺规作图教学的反思和建议 [J]. 中学数学教学 ,2012(04):6-9.