

# Hierarchical Modeling and Teach Them to Fish——Examples of Design Strategies for Calculating Areas of Grid Polygons

Mei Qian

Hangzhou Yongjin Experimental School, Hangzhou, Zhejiang, 312000, China

## Abstract

How to improve students' core mathematical literacy and students' thinking ability in mathematics subject learning? Only through the careful design of teaching links, can we accurately train and improve students' thinking ability and mathematical literacy. This paper attempts to take the teaching design of the subject learning of "area calculation of lattice polygons" as an example, focusing on the six components of thinking (see figure below), to analyze and explain how to improve the thinking level of students and make the cultivation of higher-order thinking fall to the ground effectively in the design and inquiry activities.

## Keywords

core literacy; higher-order thinking; hierarchical modeling

## 分阶建模 授之以渔——格点多边形的面积计算教学片断设计策略例谈

黔梅

杭州市勇进实验学校, 中国·浙江 杭州 312000

## 摘要

如何在数学课题学习中提升学生的核心数学素养和学生的思维能力? 只有通过对教学环节的精心设计, 才能精准地训练和提升学生的思维能力和数学素养。本文试图以“格点多边形的面积计算”课题学习的教学设计为例, 围绕思维的六种成分结构, 来剖析和阐述在设计探究活动中, 如何提升学生的思维层级, 让高阶思维的培养有效落地。

## 关键词

核心素养; 高阶思维; 分阶建模

## 1 引言

学生在探究活动中往往能够获得更多的交流机会, 这对于学生的思维、语言、个性发展来说都是具备积极的意义。数学建模是一种数学的思考方法, 通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的手段。本节课让学生经历“两个变量到三个变量”分阶建模的过程, 培养学生解决问题的能力, 渗透从特殊到一般的数学思想方法。学生的思维也从低阶的理解、应用向高阶的分析、评价, 甚至创造方向发展。

## 2 教学现象

在现实中, 许多老师因为课题学习(综合与实践)耗时、费力, 且对成绩不能起立竿见影的效果, 所以误以为可有可无。然而, 近几年中考结果表明, 学生欠缺的并不是对核心知识

的掌握, 而是学科思维能力和方法的缺失, 在考查能力的题型上失分很严重。

《义务教育数学课程标准(2011年版)》在课程内容指出: “……‘综合与实践’内容设置的目的在于培养学生综合运用相关知识与方法解决实际问题, 培养学生的问题意识、应用意识和创新意识, 积累学生的活动经验, 提高学生解决现实问题的能力。”在课题学习教学过程中, 如何凸显数学的思维和学科方法? 合作探究是很好的教学方式。<sup>[1]</sup>学生在数学活动中经历: 呈现任务→思考交流→展示分享→质疑追问→归纳提炼→学以致用, 体会数学的基本思想和思维方式, 发展数学建模和逻辑推理能力。

## 3 教学策略

在《格点多边形的面积计算》的案例中, 在设计时力争

提供三条清晰的教学线，一是知识线，即五个环节：问题引入→分阶建模→猜想归纳→分析验证→学以致用。二是方法线，如转化思想、类比思想、数学归纳等。三是思维线，即在每个问题设计中，如何体现思维的六种成分，具体成果见如下课堂教与学的主要过程。

### 3.1 思维的结构

教学的主要目的，在传授知识的同时发展学生的智力，培养学生分析问题和解决问题的能力，而思维是智能的核心，它由思维的目的、思维的过程、思维的材料、思维的监控、思维的品质和思维活动中的非智力因素六部分组成。在备课中本人紧紧围绕思维的六种成分进行教学设计，使之成为教学中隐含的一条教学线，在每个环节的教学中的潜移默化的培养学生的思维能力，发展解决问题的能力，提升数据分析和数学建模素养。

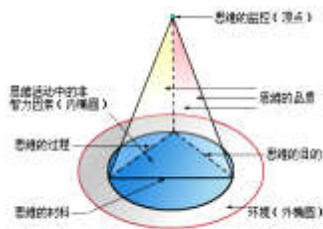


图 1

### 3.2 教学片段设计与实践

#### 【片段一】问题引入 活思维之举

课堂开始，教师直接出示格点多边形的概念，并切入问题，交流对话。

师：“如何求下面格点多边形的面积。”

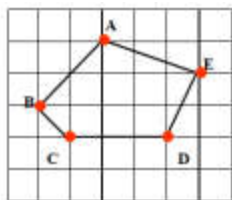


图 2

生：“割或者补的方法求”。

师：“好，我们一起求一下”。

生：争先恐后地抢答，课堂气氛十分活跃。

师：简单小结一般方法，（不规则图形  $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{割、补}}$  规则图形）继续追问“你会求下面格点多边形的面积吗？”从而自然引出  $S$ 、

$a$ 、 $b$  三个变量的相关概念。

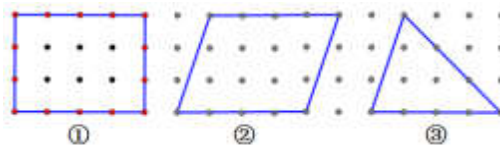


图 3

生：几乎不用思考就快速说出答案，部分同学表情疑惑，不知道教师葫芦里卖的什么药？

师：设格点多边形的面积为  $S$ ，它的内部的格点数为  $a$ ，边界上的格点数为  $b$ 。则图①  $a=$  ；  $b=$  。

生： $a=6$ ；部分  $b=4$ ；部分  $b=14$ 。（大部分同学一开始回答 4）

师：边界上点容易错，我们可以把边界上的全部点描出来，减少错误。（为后面探究活动奠定基础）<sup>[2]</sup>

生：能正确回答②③中的  $a$ 、 $b$  值。

师：我们发现，对于不同的图形， $S$ ， $a$ ， $b$  的值都在发生变化，所以三者都是变量，那今天我们一起探究三个变量  $S$ ， $a$ ， $b$  之间的数量关系。

评析：问题引入低起点，学生能快速启用默会知识解决问题，激发学生学习的兴趣，营造一个良好的思维环境。在学生你追我抢回答中，目的性地引导学生的思维进入有序思考的状态，激发学生的非智力因素。同时让学生复习巩固解决不规则图形面积的一般方法，体会数学的转化思想。随着信息量的增加，对学生的理解能力有一定的要求，思维差异化略微体现，但是问题 2 求  $a$ 、 $b$  的值学生思考后仍能自行解决，此时思维仍处于理解的低阶层次。但问题 3 中研究三个变量的关系学生缺乏方法，此时与已有经验（研究两个变量的关系）产生矛盾冲突。教师最大的作用就是引导学生如何将未知内容与已学知识与经验连接，促进新问题的解决。此处教师引导学生思考科学实验中的控制变量法，类比思想，自然而然运用分阶建模展开探究，整个环节体现思维方式的多样性。

#### 【片段二】分阶建模 激探究之欲

师：我们先来探究  $a=0$  时格点多边形中  $S$  与  $b$  之间的数量关系，第一步要干什么？

生：没有数据，怎么办？

师：回顾一下前面，我们好像数过  $a$ ， $b$  的值，这些数据哪里来的？

生：（恍然大悟）原来要先画图。

师：这跟科学实验类似，从实验中获取数据，那我们今天数学的实验就是画图。我先示范一下，如下图①②， $a$ 都为0，求出 $S$ 和 $b$ 的值。

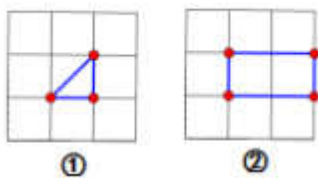


图 4

生：图①  $S=0.5$ ,  $b=3$ ；图②  $S=2$ ,  $b=6$ （还有部分同学回答  $b=4$ ，教师再强调先描再数避免错误）

师：两组数据还不足以表示 $S$ 和 $b$ 之间的关系，下面独立画图，完成表1。

表 1

图形序号	$a$ (内格点数)	$b$ (边界格点数)	$S$ (面积)
③	0		
④	0		

老师四周巡视，将部分学生的数据整理在黑板上。

师：面对这么多组数据，我们如何处理？

生：可以利用平面直角坐标系，描点法看分布。（教师在黑板上画如图5所示，并简单阐述横、纵轴单位长度取法）

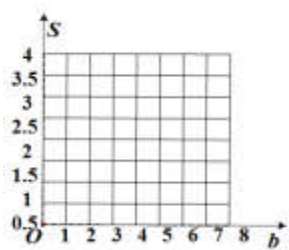


图 5

师：非常好，那我们一起试试吧。

师生共同合作，在黑板上清晰地发现，所有点呈一条直线，于是大胆猜想 $S$ 和 $b$ 呈一次函数关系，并快速用待定系数法求出解析式。

师：我们一起整理下探究步骤。

师生：步骤：画图、列表、分析数据、寻找规律；方法：控制变量法。

评析：思维是人类特有的理解和解决问题的有目的的活动，即一种以定向为前提的过程。本环节就是让学生经历学生画图、计算、数据分析等数学活动，激发学生的探究欲望，重视学生分析问题和解决问题的目的性与方向性的培养，以提高思维活动的自觉性和能动性。而且思维是一种认知的过程，它要回答三个问题：过程有多长，什么样的顺序和怎样的流程，所以在这个环节，教师带领学生一起回答了这些问题，过程中重视学生分析和检验问题中知识的接受、信息加工、分析与综合、抽象与概括的过程，以提高学生思维活动的准确性与系统性。虽然思维层次还处于理解和应用，但是思维的宽度得以打开，为下面自主探究提供方法指导。

#### 【片段二】自主探究

师：接下去小组合作完成，每组研究一种情况，如下图所示。（教师明确每组任务：1、2、3组（基础组）分别探究 $a=1; 2; 3$ 时的格点多边形中 $S$ 与 $b$ 之间的关系；5、6两组（能立组）分别探究 $b=6; 7$ 时格点多边形中 $S$ 与 $a$ 之间的关系）。

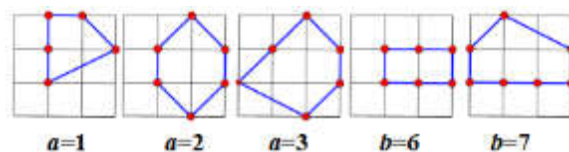


图 6

生：蠢蠢欲动，跃跃欲试。

师：合作要求如下：

- （1）先独立思考，每人画2幅图；
- （2）小组展开交流分享，共同完成表2和图2；
- （3）根据图2求关系式，并验证。

评析：学生能高效地完成任务1并进入数据收集和分享讨论环节，而且图形基本不一样。这样数据更加丰富，猜想函数类型更加科学严谨。5、6两个小组一开始受思维定势影响，画图略微费时，但因为基础较好，所以也能顺利解决。交流分享氛围活跃，每个人都有开口表达的机会，并从组员那里获得新的思考。每个学生的数据都用上，从而让学生对共同体的归属感、认同感以及尊重感有利于增强对活动参与的主体性。最后课堂反馈效果很好，个别同学还继续画图验证结论，思维达到反思性水平。<sup>[1]</sup>

教学中教师要重视学生“知其然，知其所以然”能力的培养，以提高学生思维活动的主体性与批判性。整节课学生

收获很大,但未达到思维的监控(顶点)。在分别研究完S与a、S与b的关系后,除了直接数据分析找规律得出皮克公式,教师还可以引导学生当S与a、b分别呈一次函数关系,那么在数学上称S与a、b具有线性关系,所以可以假设 $S = pa + qb + s$ ( $p, q, s$ 为常数),同样类比可以用待定系数法求出解析式。这样不仅数据分析和数学建模能落地,逻辑推理核心素养也能很好地培养。此外,最后学以致用还可增加一个思考题:你认为“皮克定理”适用于什么样的方格线?格点构成一个面积为 $\square$ 的长方形、菱形、正三角形适用吗?这样能更好地发散学生的思维,进而帮助学生获得丰富的研究问题的经验,真正体现了数学实验的价值。这样多维开放的问题设计,引导学生在探索中回归数学本质,得到“皮克公式”的一般化形式,从而锻炼学生的思维拓展,培养学生的求异精神和创新能力,实现知识的正向迁移。

### 3.3 策略分析

#### 3.3.1 抓住思维品质 因材施教

本节课从语言、数和形多方面思维材料呈现变量之间的关系,每个问题的设计都明确思维的目的,在思维的过程中,注重培养思维的品质和学生非智力因素的培养,尤其在合作分享和展示环节,思维活动中智力与能力特点在个体身上得以表现。本环节十分关注学生思维及思维的发现过程,给予学生充分的表达机会,在学生合作交流和分享评价中能充分暴露其思维过程。过程中体现了每个个体思维水平、智力与能力的差异,思维的品质得以体现,所以在教学设计时,教师要抓住学生思维品质这个突破口,因材施教,让每个孩子都能提高自己的学习质量。所以此环节分层分小组目的在于因材施教,人人都能高效地参与探究,不同的人得到不同的发展。

#### 3.3.2 重视独立与合作 双管齐下

思维活动是智力因素与非智力因素的统一,只有两者密切结合才能发挥思维活动的效能。学生共同经历类比→探究→猜想→验证过程,积累研究多个变量的方法与经验。独立

思考时,启用默会知识,类比前面积累的经验能够解决。思维的发展需要学生经过自己艰苦的思索,而画图就很直观体现,这是开启思维之门的关键。小组交流实质是思维的共享,在组内暴露自己的思维过程及遇到的疑惑或错误,相互评价、比较、反思、解疑,达成共识。在这一系列过程中促进每个人高水平思维的发展。通过分析数据,思路清晰地表达数学规律,提炼方法是高层次思维,需要概括能力与严谨的逻辑思维,另一方面组与组之间的分享不同的思维方式,特别是一些创造性思维,能引导学生自行反思,作出思维重整,使思维向深度、广度发展。最后的验证引导学生对所猜结论抱有质疑精神,及时反思。

## 4 思考

新课标指出:有效的教学活动是学生学和教师教的统一,学生是学习的主体,教师是学习的组织者、引导者和合作者。本节课充分遵循课标要求,教学实施中突出以“探究活动”为主线,注重过程性教学,将技能、思想方法全部蕴含于学习探究活动中。探究活动中给予充分的思考与讨论时间,暴露思维过程,在交流评价与概括中发展高层次思维。探究任务的呈现采取开放式,内容难度层层递进,小组合作、良性竞争、互评交流更是让每个层次的学生都有所收获,适应学生的个性发展,体验数学课堂的探索性和创造性发展思维的品质。教师应注重学生学习的自主性、主动性及创造性的充分发挥,锻炼出数学学习应有的自主探究能力,并在不断探索新知的过程中获得终身受益的感悟。

## 参考文献

- [1] 初中数学课程标准[M]. 北京师范大学出版社,2011.
- [2] 张娟萍. 高阶思维—初中数学教学变革的新视角浙江[M]. 浙江大学出版社,2017:173—221.
- [3] 林崇德. 从核心素养到学生智能的培养[R]. 北京:北京师范大学,2019:37—67.