

Teaching Steps and Thinking of Mathematical Geometry Model in Junior Middle ——Taking “Exploration of Fixed Point to Circle” as an Example

Kan Chen

Hangzhou Kaiyuan Middle School, Hangzhou, Zhejiang, 310000, China

Abstract

The teaching of geometric models is the carrier of strengthening the understanding and application of book knowledge, helping students to make complex geometric problems concise, which is conducive to improving the ability of mathematical intuition and mathematical modeling required by core mathematical literacy. Taking the exploration of the distance from a fixed point to a circle as an example, this paper puts forward the general steps of geometric model teaching: establishing geometric model, summarizing model characteristics, applying model and model expansion, guiding students to clarify the essence of geometric model and deepen their understanding of mathematics model teaching to improve the level of thinking.

Keywords

junior high school mathematics; geometric model; teaching steps

初中数学几何模型的教学步骤及思考——以“定点到圆上的距离探究”为例

陈刊

杭州市开元中学, 中国·浙江 杭州 310000

摘要

几何模型的教学是加强书本知识的理解和应用的载体, 帮助学生把复杂几何问题变得简明, 有利于提升数学核心素养要求的几何直观、数学建模能力。文章以“定点到圆上的距离探究”为例, 提出几何模型教学一般步骤: 建立几何模型, 归纳模型特征, 应用模型及模型拓展, 引导学生理清几何模型本质, 加深对数学理解, 借力模型教学, 提升思维水平。

关键词

初中数学; 几何模型; 教学步骤

1 背景

几何模型是几何知识的组合, 不应成为学生学习上的新负担。几何模型的教学是加强书本知识的理解和应用的载体, 初中数学安排几何模型的教学课, 既可以帮助学生在面对复杂几何问题时, 思路变得简明, 迅速找到突破口; 又有助于提升学生归纳、转化和建模能力, 提升思维水平。文章以“定点到圆上的距离探究”这个几何模型教学为例, 提出几何模型教学一般步骤。

2 教学步骤

2.1 几何模型建立

几何模型的建立方式因模型的复杂程度而异。简单的几

何模型可以从数学题或者生活情景中引出; 复杂的几何模型可以纯数学式的情景给出, 这有利于模型的证明。^[1]

圆 O 外一点 A 到圆 O 上一动点 P 的距离 AP , 请同学在讲义上画一下, 并思考 AP 的长度变化情况, 你有什么发现?

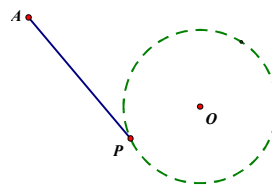


图 1

【设计意图】本模型如图 1 所示, 让学生动手画一画, 有助于加深对模型的理解。针对学生思考的角度各异, 教师

进行引导, 指向 AP 的最值。通过小组讨论和老师适当引导, 学生能发现三角形的三边关系可以证明何时取到最值。

2.2 归纳模型特征

本例的模型属于复杂的几何模型, 若不及时归纳模型的特征, 学生应用模型时容易犯错。模型特征的归纳要简洁、精准。

例 1 如图 2 所示在直角 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=3$, $\angle CAB=90^\circ$, 点 D 是以 AB 为直径的圆上一个动点, 连结 CD, 求线段 CD 取值范围。

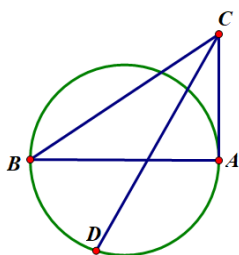


图 2

分析: 符合“定点到圆上距离”模型吗? 模型的特征是什么?

追问: “D 是以 BC 为直径的半圆上一个动点”能否换个说法?

【设计意图】本例用数据描述“定点到圆上距离”几何模型, 让学生明白归纳几何模型特征的重要性。“①三个点, 两个定点即圆心和圆外的点, 和运动轨迹为圆弧的一个动点; ②这个圆是确定的, 圆心和半径都是确定的”。

2.3 模型的应用

几何模型的应用, 不单纯为了解决问题, 更要挖掘数学本质, 提升学生的思维能力, 因此, 教学中选择的例题要有混淆度, 学生只有充分把握住几何模型特征才能应用模型的结论解决问题。

例 2 如图 3 所示(1), 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle CBA$ 为直角, $AC=3$, $AB=4$, 点 D 是边 AB 上一个动点, 以 AD 为直径的圆交线段 CD 于点 E, 求 BE 的最小值。

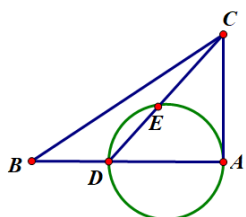


图 3 (1)

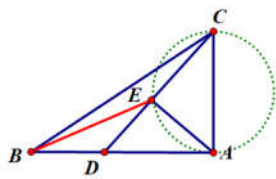


图 3 (2)

分析: ①以 AD 为直径的圆能不能直接套用模型?

② B 是定点, E 是动点, 怎么确定 E 的运动轨迹?

③点 E, 有什么是不变的?

【设计意图】对于例 1, 中等生在作答时都可顺利解出, 通过一个变式, 强迫学生去思考这个几何模型的真实特征。学生通过与例题 1 模型比较, 分析出: 点 E 始终在 CD 为直径的圆上, 从而得到 $\angle CEA=90^\circ$, 即 $\angle AED=90^\circ$ 。故如图 3 (2), 点 E 的运动轨迹以 AC 的为直径的圆弧上。教师适时启发学生于动态之中寻找不变的量入手。

例 3 如图 4 所示, 在矩形 ABCD 中, $AB=2$, $AD=3$, E 是 AB 中点, F 是 BC 上动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$, 连结 $B'D$, 求其最小值。

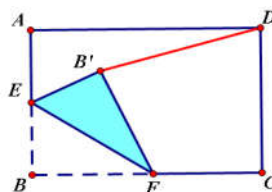


图 4

分析: ①这里藏着的以 EBF B' 四点共圆的圆可用吗?

②点 B' 的运动轨迹?

③折叠的几何意义?

【设计意图】学生通过寻找等量关系, $AE=BE=B'E=1$, 分析点 B' 在以 AB 为直径的圆弧上, 从而找到 B' 的运动轨迹, 即《墨经》中总结“圆, 一中同长也”。折叠除了带来全等之外, 但更本质的, 绕某点作圆周运动。

同时, 让学生比较例 2 和例 3 中两个确定动点的运动轨迹是圆的方法, 两者之间有什么不同? 各有什么特征? 还能不能进一步提升?

中考题 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, P 是三角形内一动点, 且满足 $\angle PAC = \angle PCB$, 求 PB 的最小值。

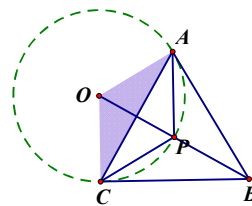


图 5

分析: ①运动中什么量保持不变? $\angle APC$ 始终等于 120° ,

- ②满足条件的点P的运动轨迹是什么?
- ③如图5所示,圆心在哪里?如何量化?
- ④ $\triangle AOC$ 是什么三角形?
- ⑤ $\triangle OCB$ 是什么三角形?

【设计意图】本题设计意图来源于教材.浙教版九上教科书中有个灯塔题目,只要角度保持固定,船就在以AB为弦的圆弧上运动.本题可做其推广:“定张角对定弦”.当 $\angle APC$ 始终等于 120° ,从而点P的运动轨迹是圆的一部分.

2.4 模型的拓展

模型的拓展是建立在充分了解模型构成原理的基础之上,拓展可以是模型中条件的更改,亦或从一个几何模型讲到一类几何模型;也可以通过课堂小结环节,稍作展开.比如本课几何模型可以拓展到:如图6所示,“平面内一定点A和一动点P,若P的运动轨迹是确定的,是否能求出线段AP的最值?”

轨迹:

(1) 直线

(2) 曲线(圆)

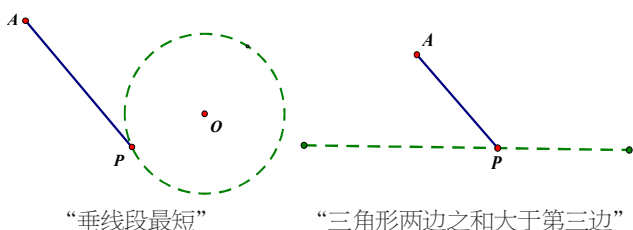


图6

本课的课堂小结以下列三个问题结尾:

①本节课介绍了怎么样的几何模型?它有什么特点?

两个定点,一个动点绕其中圆心旋转.通过“定张角对定弦”和“一中同长”等方法来判断动点的运动轨迹是圆(弧),然后用“隐圆”确定定点与动点的距离范围.

②对这个模型有什么其他想法?

若动点的运动轨迹不是圆(弧),比如直线也可以找到判定运动轨迹是直线的方法,并确定距离的最值.

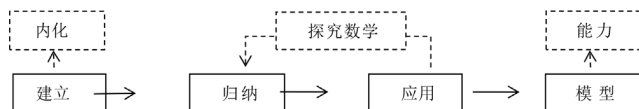
③如何研究一个几何模型,尤其是动态的?

点动会引起相关量和位置的变化,分析条件找到始终不变的量和关系,这是确定运动轨迹的突破口.即变化中寻求不变.

【设计意图】通过三个问题,引发学生的思考,有偏重于应用思维如模型的特征,引导学生抓住了几何模型的特征,

才能应用模型;有偏重于创新思维如鼓励学生思考动点运动轨迹还可以是别的几何图形;有偏重于评价思维如让学生评价整个解题思路,得出化动为静的关键是寻找不变量。^[1]

概括案例中的教学环节,将几何模型的教学步骤归纳如下:



3 教学思考

3.1 理清几何模型本质,加深对数学理解

几何模型的原理就是几何知识的组合,弄清楚几何模型的本质.如比较寻找隐藏圆的两大法宝“定张角对定弦”和“一中同长”,也是确定点与圆位置关系的两个方法.平面几何中线段的最值问题是能有效发展学生几何直观和推理能力的重要知识,学生通过本节课学习,感受化动为静,培养在动态问题中寻求不变关系,从而解决数学问题的能力。^[3]

3.2 借力几何模型教学,提升学生的思维

对几何模型特征的归纳,无论是学生自主或老师引导下都是提升思维的良机.学生在归纳时需要分析、评价模型共有的和独有的特征,思维要求较高.教师可以不断推敲学生自主归纳的准确度来帮助学生.

数学语言的表述多做些分析,多思考转化成其他条件,打开学生的知识网络.如“圆上一点”转化为“到直径的端点的两边互相垂直”,帮助学生固化知识点,也帮助思维向更高处“定张角对定弦”理解做好铺垫.

4 结束语

初中几何中,教师积极渗透模型意识,促进几何知识的整合,帮助学生更有效、更高效地学习几何知识.教学步骤只是手段,几何教学过程的核心是培养学生的思维能力,这是数学育人的目标所在.

参考文献

- [1] 张娟萍.高阶思维—初中数学教学变革的新视角[M].浙江大学出版社,2017.
- [2] 张军.几何模型教学研究[J].中学教学参考,2019(8):11-12.
- [3] 薛琼.感知旋转方法,感悟模型应用—对几何旋转法及模型的探究与思考[J].数学教学通讯,2019(14):86-88.