Discussion on the Relationship Between Local Boundedness and Convergence of Functions

Xiaohong Wu

School of Mathematics and Big Data, Hohhot Minzu College, Hohhot, Inner Mongolia, 010051, China

Abstract

The relationship between local boundedness and convergence of a function is a knowledge point that often plagues students in the course of "Mathematical Analysis". This paper further elaborates on "monotonic boundedness" to enable students to more clearly grasp the dialectical relationship between locally bounded and convergence.

Keywords

convergence; monotonic function; local boundedness; neighborhood

浅谈函数局部有界与收敛的关系

吴晓红

呼和浩特民族学院数学与大数据学院，中国·内蒙古 呼和浩特 010051

摘　要

函数的局部有界与收敛之间的关系是《数学分析》课程中经常困扰学生的一个知识点。本文进一步详细阐述“单调有界定理”，使学生更加清晰地把握局部有界与收敛之间的辩证关系。

关键词

收敛；单调函数；局部有界；邻域

1 引言

“单调有界定理”是数学专业学生《数学分析》课程中一个重要定理，该定理不仅在证明一些重要极限，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ 中有非常重要的应用，还是论证实数完备性的六大重要定理等价性的重要工具。为此，长期以来受到了许多学者的关注。在文 [1] 中作者利用实数十进制证明确界原理的方法给出了“单调有界定理”的一个简洁证明，填补了一些教材中没有证明的遗憾。在文 [2] 中作者对“单调有界定理”教学思路的设计探讨了研究性教学对学生学习能力和创新能力培养的重要作用，文 [3] 进一步，将“单调有界定理”推广到二维情形。本文在前人工作的基础上，进一步研究“单调有界定理”，得到了函数的局部有界与收敛之间的等价关系，同时对具有明确单调性的函数给出了左（右）极限以及极限。

2 主要内容

2.1 定理 1

设 f 为定义在 x_0 的右空心邻域 $U_+^0(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在。

2.1.1 证明

不妨设 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上递增。因为 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上有界，由确界原理，$\inf\limits_{x\in U_+^0(x_0)}f(x)$ 存在，记为 A . 下证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A.$

事实上，任何 $\varepsilon>0$ ，按下确界定义，存在 $x^{'}\in U_+^0(x_0)$ ，使得

$$f(x^{'})<A+\varepsilon.$$

取 $\delta=x^{'}-x_0>0,$ 则由 f 的递增性，对一切 $x\in(x_0,x^{'})=U_+^0(x_0,\delta),$

有 $f(x)\le f(x^{'})<A+\varepsilon.$

教学方法创新与实践·第 03 卷·第 02 期·2020 年 02 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i2.3515

另一方面，由 $A \le f(x)$, 更有 $A-\varepsilon < f(x)$. 从而对一切 $x \in (x_0, \delta)$，

有 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$,

这就证得 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A.$

2.1.2 推论

由定理的证明过程容易得下面的推论。

（1）推论 1

设 f 为定义在 $U_+^0(x_0)$ 上的单调递增（减）有界函数，则

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in U_+^0(x_0)} f(x).$$

（$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\limits_{x \in U_+^0(x_0)} f(x).$）

（2）推论 2

设 f 为定义在 $U_-^0(x_0)$ 上的单调递增（减）有界函数，则

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x \in U_-^0(x_0)} f(x).$$

（$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\limits_{x \in U_-^0(x_0)} f(x).$）

结合函数左、右极限与极限的关系可得：

（3）推论 3

设 f 为定义在 $U^0(x_0)$ 上的单调递增（减）有界函数且

$\inf\limits_{x \in U_+^0(x_0)} f(x) = \inf\limits_{x \in U_-^0(x_0)} f(x) = A$

（$\sup\limits_{x \in U_+^0(x_0)} f(x) = \sup\limits_{x \in U_-^0(x_0)} f(x) = A$），

则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

有上面的讨论容易得局部有界与收敛的关系。

2.2 定理 2

设 f 为定义在 $U_+^0(x_0)$ 上的单调有界函数，则 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上有界当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在。

2.2.1 证明

有函数极限的局部有界性质可知，必要性是显然的。充分性由推论 1 直接可得。

利用推论 2 和推论 3 同理可得 $U_-^0(x_0)$ 与 $U^0(x_0)$ 上单调函数的局部有界与收敛之间的关系，这里不再赘述。

参考文献

[1] 郑权 , 张彩霞 , 郭秀晖 . 单调有界数列必有极限定理的一个直接证明及其作用 [J]. 大学数学 ,2014,1(30): 104—105.

[2] 高巧琴 . 单调有界定理的研究性教学 [J]. 吕梁学院学报 ,2013,2(3): 70—71.

[3] 谢胜利 . 平面上单调有界定理及其应用 [J]. 安徽建筑工业学院学报（自然科学版）[J]. 2009,6(17): 107—109.