DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i3.3573

Heterogeneous Laurent Series Theory and Isolated Singularity Classification

Yanhui Yang[1] **Yujie Jiang**[1] **Jicheng Tao**[2]

1. Department of Information and Computing Science, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang, 310018, China
2. Department of Mathematics, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang, 310018, China

Abstract

In this paper, Laurent Series theory and Isolated Singularity Classification of complex variable function is applied to heterogeneous complex variable function. Heterogeneous laurent series are established by using the series theory of heterogeneous analytic function. At the same time, the heterogeneous Isolated Singularity Classification is established by using the Heterogeneous Laurent Series theory.

Keywords

heterogeneous laurent series theory; heterogeneous singularity; heterogeneous isolated singularity

Fund Project

Funded by the 22nd Student Scientific Research Project of China Jiliang University.

非均匀洛朗级数和孤立奇点分类

杨彦晖 [1] 江宇婕 [1] 陶继成 [2]

1. 中国计量大学信息与计算科学系，中国・浙江 杭州 310018
2. 中国计量大学应用数学系，中国・浙江 杭州 310018

摘　要

论文把复变函数的洛朗级数理论和孤立奇点分类推广到非均匀复变函数上，运用非均匀解析函数理论和级数理论建立了非均匀解析函数的洛朗级数展开，建立了孤立奇点的分类。

关键词

非均匀洛朗级数；非均匀奇点；非均匀孤立奇点

基金项目

中国计量大学第二十二届学生科研计划项目资助。

1 引言

笔者在文献 1,2[1,2] 推广了复变函数理论，建立了非均匀复变函数理论，给出了非均匀复数域 C_K，非均匀解析函数和非均匀积分的定义，在此基础上建立了非均匀拉普拉斯方程与非均匀 Cauchy−Riemann 方程组的关系，获得了非均匀 Cauchy 积分定理，Cauchy 积分公式。随后在文献 3[3] 中建立了非均匀解析函数的级数理论，获得了泰勒级数展开定理。论文利用非均匀解析函数的积分 [2] 和级数理论 [3]，推广文献 [4,5] 的洛朗级数理论，孤立奇点的分类，建立非均匀洛朗级数理论和孤立奇点分类，另外，该论文的后续研究工作也可以进一步研究有关非均匀复变函数的奇点附近的可视化问题 [5]，分析奇点的变化状态。

2 预备知识

下面给出非均匀复数、非均匀复变函数的一些基本定义及性质，具体参考文献 [1−3]。

2.1 非均匀复数的定义

考虑到复数在各个领域的广泛应用，我们对复数单位做进一步推广，定义非均匀复数。

定义集合 $C_K=\{z|z=a+jb\}$，其中 a,b 为实数 R，$j^2=-k,\ k\geq 0$。

在 C_K 中引入数乘

教学方法创新与实践 · 第 03 卷 · 第 03 期 · 2020 年 03 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i3.3573

$$z = a + jb, z \in C_K, m \in R, mz = ma + jmb,$$

在 C_K 中引入加法

$$z_1 = a_1 + jb_1, z_2 = a_2 + jb_2, z_1 \in C_K, z_2 \in C_K,$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

定理（1）[1] 在上面的数乘、加法和乘法运算下，C_K 为 R 上的一个域，称为非均匀复数域。

2.2 非均匀复变函数的微分

非均匀复变函数的定义，类似于复变函数的定义，形式上和数学分析中函数定义相同，此时自变量和函数的取值均为新定义的非均匀复数。在定义函数之前，根据复平面点集的几个基本概念，我们可以推广到非均匀复平面上。

定义（1） 设 f：从 C_K 到 C_K 的映射，则称为 f 为 C_K 上的非均匀复函数。

非均匀函数的导数，解析的定义及与偏微分方程组的关系在文献 [1] 中给出，下面直接给出结论不予证明：

定义（2）设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的邻域内或者包含 z_0 的区域 D 内有定义，考虑比值

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (\Delta z \neq 0)$$

如果当 z 按照任意方式趋于 z_0 时，即当 Δz 按照任意方式趋于 0 时，比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限都存在，且其值有限，则称此极限为函数 $f(z)$ 在 z_0 的导数，并记为 $f'(z_0)$，即

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

这时称函数 $f(z)$ 于点 z_0 可导。

定义（3）如果函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内可微，则称 $f(z)$ 为区域 D 内的解析函数，或称函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析。函数在某点解析，是指在该点的某一个邻域内是解析的，函数在某个闭域解析，是指在包含该闭域的某区域内解析。

2.3 非均匀复变函数的积分

非均匀复变函数的积分见文献 [2]。

定义（4）设非均匀复数域 Z_k 上的有向曲线 C：

$$z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

以 $a = z(\alpha)$ 为起点，$b = z(\beta)$ 为终点，$f(z)$ 沿 C 有定义，顺着 C 从 a 到 b 的方向在 C 上取分点：$a = z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_n = b$，这样可以将曲线 C 划分为 n 个弧段，在从 z_{t-1} 到 z_t 的每一个弧段上任取一点 ξ_t，那么

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} f(\xi_t)\Delta z_t, \quad \Delta z_t = z_t - z_{t-1}$$

当分点增多时，弧段逐渐加细，如果和数 S_n 极限存在且为 S，则称 $f(z)$ 沿 C（从 a 到 b）可积，S 为其上的积分，记号为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$，其中 C 为积分路径。

定理（2）[2] 设函数 $f(z)$ 在非均匀复数域 C_K 上的单连通区域 D 内解析，C_j 为 D 内任一条周线，且则有 $\int_{C_j} f(z)dz = 0$。

定理（3）[2] 设区域 D 的边界是非均匀复数域 C_K 上周线（复周线）C_j，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D} = D + C_j$ 上连续，则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \quad (z \in D)$$

2.4 非均匀幂级数

非均匀的幂级数见文献 [3]。

定理（4）[3] 非均匀幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在其收敛椭圆域 $T: |z-a|_k < R$ 内绝对且内闭一致收敛到解析函数 $g(z)$，即

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad （公式 1）$$

而且在内，幂级数（2.1）可以逐项求导，即

$$\begin{aligned} g^{(p)}(z) = c_p p! + c_{p+1}(p+1)P(p-1)\cdots 2(z-a) + \cdots \\ + c_n n(n-1)\cdots(n-p+1)(z-a)^p + \cdots \end{aligned} \qquad （公式 2）$$

同时（公式 1）和（公式 2）的收敛椭圆半径 R 相同，其中的系数满足下面的关系 $c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (p = 0,1,2,\cdots)$。

定理（5）[3] 设函数 $g(z)$ 是区域 D 内的非均匀解析函数，则只要椭圆 $T: |z-a|_k < R$ 且 $T \subset D$ 内，则 $g(z)$ 在内能展开成非均匀幂级数：

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i3.3573

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

其中系数

$$c_p=\frac{g^{(p)}(a)}{p!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_\rho}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(p=0,1,2,\cdots),$$

（$T_\rho=\left|\xi-a\right|_k=\rho,\rho<R$）且展开是唯一的。

3 非均匀复级数洛朗展开

3.1 非均匀双边幂级数敛散性

设 $\cdots c_{-n},\cdots,c_0,c_1,\cdots,c_n\cdots$ 和是非均匀复常数，我们称下面的级数

$$\cdots+c_{-n}(z-a)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

（公式 3）

为非均匀双边幂级数，简记为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 。

下面我们讨论双边幂级数（公式 3）的敛散性：

（3）的收敛等价于下面两幂级数（公式 4）和（公式 5）的收敛性

$$c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots \qquad （公式 4）$$

$$c_{-1}(z-a)^{-1}+c_{-2}(z-a)^{-2}\cdots+c_{-n}(z-a)^{-n}+\cdots \qquad （公式5）$$

我们对第二个幂级数（公式 5）令 $\xi=)(z\text{-}a^{-1}$，则有

$c_{-1}\xi+c_{-2}\xi^2\cdots+c_{-n}\xi^n+\cdots$ （公式 6）

若（公式 6）收敛椭圆半径 $\frac{1}{r}$，根据定理（5），则（公式 6）在 $\left|z-a\right|_k>r$ 内绝对且一致收敛到非均匀解析函数 $f(z)$。因此有下面的定理：

定理（6）若（公式 4）式收敛椭圆半径为 R，且 $r<R$，则非均匀双边幂级数（公式 3）在椭圆环 $r<\left|z-a\right|_k<\ R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛到解析函数 $g(z)$。

证明：非均匀幂级数（公式 4）的收敛椭圆半径为 R，因此由定理（5），（公式 4）$\left|z-a\right|_k<\ R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛到解析函数 $h(z)$，根据前面的分析（公式 6）在 $\left|z-a\right|_k>r$ 内绝对且一致收敛到非均匀解析函数 $f(z)$ 收敛，因此（公式 3）在椭圆环 $r<\left|z-a\right|_k<\ R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛到非均匀解析函数 $g(z)=f(z)+h(z)$ 。

定理（7）若非均匀函数 $g(z)$ 在椭圆环 H: $r<\left|z-a\right|_k<\ R$ 内非均匀解析函数，则 $g(z)$ 在 H 内一定能展开成双边幂级数：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$

其中系数 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_\rho}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

（$T_\rho=\left|\xi-a\right|_k=\rho,r<\rho<R$）且展开是唯一的。

证明：在 H 中任取一点 z，因此存在

$$\Gamma_1\text{:}\left|\xi-a\right|_k=\rho_1,r<\rho_1<R$$

和 $\Gamma_2\text{:}\left|\xi-a\right|_k=\rho_2,r<\rho_1<\rho_2<R$ 使得在 Γ_1 和 Γ_2 所围区域的内部，由非均匀柯西积分公式，有

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\text{-}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

对第一式利用定理（5）一样的证明过程得

$$\frac{1}{\ \ \pi i}\int\ \frac{\ (\ )}{\xi\ \ z}\mathrm{d}\ =\sum^{+\infty}c\ (z\ \ \ a)\ ,$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(n=0,1,2,\cdots)$，

对第二式的积分 $\text{-}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，我们有，

$$\text{-}\frac{g(\xi)}{\xi-z}=\frac{g(\xi)}{z-a}\frac{1}{1-\dfrac{\xi-a}{z-a}},$$

又因为 $\xi\in\Gamma_1,\ \frac{\xi-a}{z-a}<1$，于是有

$$\text{-}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(n=\text{-}1,\text{-}2,\cdots),$$

再由非均匀柯西定理把系数统一为

教学方法创新与实践·第 03 卷·第 03 期·2020 年 03 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i3.3573

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{T_\rho}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$T_\rho=\left|\xi-a\right|_k=\rho, r<\rho<R$，唯一性由系数的具体表达式可得。

3.2 非均匀解析函数的孤立奇点分类

定义（5）若非均匀解析函数 $g(z)$ 在点 a 不是非均匀解析函数，但 a 的任何邻域都有 $g(z)$ 的非均匀解析点，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀奇点。设函数非均匀函数 $g(z)$ 在 a 点的去心椭圆域 $\overset{\circ}{U}(a)=\left\{Z\left|0<\left|Z-a\right|_k<r\right.\right\}$ 内解析且 a 为非均匀奇点，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀孤立奇点。

由定理（7），$g(z)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)=\left\{Z\left|0<\left|Z-a\right|_k<r\right.\right\}$ 内展开成幂级数形式 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 。

我们成正幂部分 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 为 $g(z)$ 的正则部分，负幂部分 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 为 $g(z)$ 的主要部分，则非均匀奇点 a 完全由 $g(z)$ 的主要部分决定。

定义（6）设 a 为 $g(z)$ 的非均匀孤立奇点。

（1）若 $g(z)$ 在 a 的主要部分为零，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点。

（2）若 $g(z)$ 的主要部分为有限项：

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}$$

且 $c_{-m}\neq0$，则称 a 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点，若 $m=1$ 则称 a 为非均匀单极点。

（3）若 $g(z)$ 在 a 的主要部分为无限项，则称 a 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点。

下面给出三类非均匀奇点的等价性刻画：

定理（8）设 a 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点，则下面三条都可以作为非均匀可去奇点的定义

（1）$g(z)$ 在 a 的主要部分为零。

（2）$\lim\limits_{z\to a}g(z)=b(\neq\infty)$ 。

（3）$g(z)$ 在 a 的某邻域内有界。

证明：（1）⇒（2），（2）⇒（3）是明显的，下证（3）⇒（1）

我们只要证明主要部分为零就好了，即负部分的系数 $c_{-m}\equiv0(m>0)$

$$c_{-m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho}\frac{g(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{-m+1}}(m=1,2,\cdots),$$

于是

$$c_{-m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho}g(\xi)(\xi-a)^{m-1}d\xi$$

当 $\rho\to0$ 时，$c_{-m}\to0$，因此 $c_{-m}\equiv0(m>0)$。

注：当 a 为 $g(z)$ 的非均匀可去奇点时，我们在 a 点补充 $g(z)$ 的定义，若 $\lim\limits_{z\to a}g(z)=b(\neq\infty)$，记 $g(a)=b$，则 $g(z)$ 为 a 邻域的非均匀解析函数，若 $g(z)$ 为 a 邻域的非均匀解析函数，$g(z)$ 在 a 的主要部分为零，并且 $g(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}c_n(z-a)^n(m>0)$，$c_m\neq0(m>0)$，则称 a 为 $g(z)$ 的 m 阶零点。

定理（9）设 a 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点，则下面三条都可以作为 m 阶非均匀极点的定义

（1）$g(z)$ 在 a 的主要部分为

$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}$，且 $c_{-m}\neq0$

（2）$g(z)$ 在 a 的邻域内可以表示为，

$$g(z)=\frac{\omega(z)}{(z-a)^m}$$

且 $\omega(z)(\omega(a)\neq0)$ 为 a 的邻域内的非均匀解析函数。

（3）$f(z)=\frac{1}{g(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点。

证明：先证（1）⇒（2）

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\cdots\\&=\frac{c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-a)+\cdots}{(z-a)^m}\\&=\frac{\omega(z)}{(z-a)^m}\end{aligned}$$

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i3.3573

显然 $\omega(z)(\omega(a)\neq 0)$ 为 a 的邻域内的非均匀解析函数。

（2）$\Rightarrow$（3）

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{(z-a)^m}{\omega(z)}=\frac{(z-a)^m}{\omega(a)+\omega'(a)(z-a)+\cdots},$$

$$\omega(a)\neq 0,$$

因此，$f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点。

（3）$\Rightarrow$（1）

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=(z-a)^m\lambda(z)=\frac{(z-a)^m}{\omega(z)},$$

$$\text{其中}\ \omega(a)=\frac{1}{\lambda(a)}\neq 0,$$

于是 $g(z)=\dfrac{\omega(z)}{(z-a)^m}=\dfrac{\omega(a)+\omega'(a)(z-a)+\cdots}{(z-a)^m}$，

$\omega(a)\neq 0$，因此 a 为 $g(z)$ 的 m 阶非均匀极点。

由定理（9）中的（3），我们有，

定理（10） 设 a 为 $g(z)$ 的非均匀极点的充要条件是 $\underset{z\to a}{Lim}\, g(z)=\infty$。

定理（11）设 a 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点等价于下面的结论

（1）$g(z)$ 关于 a 点展开的主要部分有无穷项。

（2）$\underset{z\to a}{Lim}\, g(z)\neq\begin{cases}\infty\\ b\end{cases}$，即极限不存在。

（3）$f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 以点 a 为非均匀本质奇点。

证明：先证（1）$\Rightarrow$（2），$g(z)$ 关于 点展开的主要部分有无穷项，所以 a 为 $g(z)$ 的非均匀本质奇点，若 $\underset{z\to a}{Lim}\, g(z)=\infty$，则 a 为非均匀极点，若 $\underset{z\to a}{Lim}\, g(z)=b(\neq\infty)$，则 a 为非均匀可去奇点。（2）$\Rightarrow$（3），若点 a 不是 $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 的非均匀本质奇点，则点 a 要么为非均匀可去奇点，要么为非均匀极点，这与 $\underset{z\to a}{Lim}\, g(z)\neq\begin{cases}\infty\\ b\end{cases}$ 矛盾。（3）$\Rightarrow$（1）易得。

例：$a=1$ 为 $\dfrac{1}{1-z}$ 的非均匀单极点。

参考文献

[1] 赵雪娇 , 陈雲 , 陶继成 . 非均匀复数和非均匀复变函数 . 应用数学进展 ,2017,6(1):69−77.

[2] 陈雲 , 赵雪娇 , 陶继成 . 非均匀复变函数积分 . 应用数学进展 ,2017,6(2):153−164.

[3] 杨彦晖 , 江宇婕 , 陶继成 . 非均匀复变函数级数理论 . 应用数学进展 ,2020,9(2):178−186.

[4] 钟玉泉 . 复变函数论 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2012.

[5] 戴滨林 , 杨世海 . 复变函数 [M]. 上海 : 复旦大学出版社 ,2019.