DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i4.4053

Related Research on Absolute Continuous Function

Xiu Bai

Department of Mathematics, Gansu Normal University for Nationalities, Hezuo, Gansu, 747000, China

Abstract

In this paper, the relations among absolute continuous function, calculus, its basic theorem and bounded variation function are briefly studied and summarized.

Keywords

absolute continuous function; calculus; bounded variation

对绝对连续函数的相关研究

白秀

甘肃民族师范学院数学系，中国·甘肃 合作 747000

摘　要

论文对绝对连续函数、微积分和其基本定理以及有界变差函数这三者间的关系进行了简单研究总结。

关键词

绝对连续函数；微积分；有界变差

1 预备知识

1.1 绝对连续函数

假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$, 使得对于在闭区间 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 (a_1,b_1)，(a_2,b_2) …，(a_n,b_n)，当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 的时候，就会有 $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$，那么我们称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的一个绝对连续函数，从而令 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续的充分必要条件为：当 $\Delta\to 0$ 时候，$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$。

1.2 微积分基本定理

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。上式成为牛顿－莱布尼茨公式，也常写成 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$。

1.3 有界变差函数

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有限函数，如果对于 $[a,b]$ 的一切分划 T，使得 $\left\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\}$ 成一有界数集，则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，而且有界变差函数必能分解成两个单调增加函数的差。

1.4 Lebesgue 定理

假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则：

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在导数 $f'(x)$。

（2）$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

（3）如果 $f'(x)$ 为增函数，有 $\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$。

2 相关结果的讨论

2.1 绝对连续函数与有界变差函数之间的关系

分析：绝对连续函数一定是有界变差的，有界变差函数未必是绝对连续函数。

证明：（1）假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，于是取 $\varepsilon=1$ 按定义，存在 $\delta>0$，对任意有限个互不相交的开区间 $\{a_v,b_v\}$ 只要 $<\delta$，则 $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<1$。将区间 $[a,b]M$ 等分，得到分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_M=b$

对 $[x_{i-1},x_i]$ 上任何一组分点 $x_{i-1}=Z_0<Z_1<\cdots<Z_k=x_i$

由于 $\sum_k(z_k-z_{k-1})=x_i-x_{i-1}<\delta$，所以 $V_F(Z_0,\cdots,Z_K)\le 1$

教学方法创新与实践·第 03 卷·第 04 期·2020 年 04 月
DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i4.4053

因此$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F)\le 1$。从而$\bigvee_a^b(F)=\sum_{i=1}^{M}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F)\le M$。所以 $F(x)$ 是有界变差的。

（2）关于有界变差函数

必是绝对连续函数，可以举一反例：跳跃函数是有界变差函数但是不是绝对连续函数。

2.2 连续函数与有界变差函数之间的关系

连续函数不一定是有界变差函数，例如：

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x},0<x\le 1,\\ 0,x=0\end{cases}$$

是 [0,1] 上的连续函数，如果取分点 $x_0=0$，$x_n=1$，$x_i=\dfrac{1}{(n-1)-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，$i=1$，2，…，$n-1$，那么

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_i\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right|$$

$$>\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right)>\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k}。$$

但是$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$，所以 $SUPV_f(x_0,x_1,\cdots x_n)=\infty$。即 $f(x)$ 不是有界变差的。

2.3 满足 Lipschitz 条件的函数一定是绝对连续函数

证明：假设 f 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，则存在 A，当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时，有$|f(x_1)-f(x_2)|\le A|x_1-x_2|$

对于任意的 $\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{A}$。这时对于任意区间$\{(a_i,b_i)\}$，只要$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，总有$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\le\sum_{i=1}^{n}A(b_i-a_i)<\varepsilon$。

2.4 绝对连续函数是一致连续函数

证明：假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于在闭区间 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间（a_1,b_1），（a_2,b_2）…（a_n,b_n），当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 的时候，就会有 $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$，当 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$|x_1-x_2|<\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时，总有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$ 成立，从而证得 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续。

3 性质的讨论

性质 1：$[a,b]$ 上的绝对连续函数必定是连续的。

性质 2：两个绝对连续函数的线性组合，乘积仍是绝对连续函数。

证明：性质一的证明由上面提到的绝对连续函数一定是一致连续函数的结论可得，一致连续函数一定连续。性质二的证明很显然不用详细叙述。

4 相关结论进一步的推论和推广

推论 1：$[a,b]$ 上导数处处存在且有限的单调函数 $f(x)$ 必是绝对连续的。

证明：假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的导数处处存在的函数，且导数是有界的，即 $\exists M>0$，使得$|f'(x)|\le M$成立，则当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时，根据中值定理至少存在一点 ξ，就有$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|\le M|x_1-x_2|$ 成立，再由 2.3 对于任意的 $\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{A}$。这时对于任意区间{（$a_i,b_i$）}，只要$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，总有<，总有$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\le\sum_{i=1}^{n}A(b_i-a_i)<\varepsilon$。

综上，结论成立。

推论 2：假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则

（1）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在导数 $f'(x)$；

（2）$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

证明　由于任何一个有界变差函数，必可以分解成两个单调增加函数的差 [1]，所以根据前面的预备知识里的 Lebesgue 定理可知结论成立显然。

推论 3：Newton--Leibniz 公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt$$

成立的充分条件是 $F(x)$ 是绝对连续函数。

证明：首先证明充分性，因为 $F(x)$ 为绝对连续函数，所以 $F(x)$ 为有界变差数列，有推论二可知 $F'(x)$ 处处存在。$\Psi'(x)=F'(x)-\Phi(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上处处成立 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。下证等式成立，设$\Phi(x)=\int_a^x F'(t)dt$，令 $\Psi(x)=F(x)-\Phi(x)$ 由于得 $\Psi(x)=F(a)$，即$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt$

再证必要性由已知$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt$，令 $F'(x)=f(x)$，由于微积分基本定理中 $f(x)$ 连续，那么对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于在闭区间 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间（a_1,b_1），（a_2,b_2）…，（a_n,b_n），当$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$的时候，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续则有界即存在 $M>0$，使得$|f(x)|\le M$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$则有下面的结果成立：

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i}f(t)dt\right|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|f(t)|dt=\int_{\bigcup_i(a_i,b_i)}|f(t)|dt<\varepsilon.$$

则 $F(x)$ 为绝对连续函数。

综上所述 $F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt$成立的充分条件是 $F(x)$ 是绝对连续函数。

例：讨论以下函数

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i4.4053

$f(x)=x^a\sin\frac{1}{x^b}$ 0≤x≤1；a,b>0）是否有有界变差和绝对连续。

解：当 a≤b 时在 [0,1] 上取分点 $x_0=0$，$x_n=1$，$x_1=\left[((n-1)-i)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^{-\frac{1}{b}}, i=1,2,\ldots n-1.$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\geq\sum_{i=1}^{n-1}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left|x_i^{\ a}\sin\frac{1}{x_i^{\ b}}-x_{i-1}^{\ a}\sin\frac{1}{x_{i-1}^{\ b}}\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\left[((n-1)-i)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^{-\frac{a}{b}}+\left[(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}\right]^{-\frac{a}{b}}\right|$$

$$\geq\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{1}{(n-i-1)\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$>\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{(n-i+1)\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\to\infty(n\to\infty),$$

所以 $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\infty$，f（x）不是 [0,1] 上有界变差函数，从而也不是绝对连续函数。当 a>b>0 时，$f^{'}(x)=ax^{a-1}\sin^{-b}x-bx^{a-b-1}\cos x^{-}$且$\left|f^{'}(x)\right|\leq ax^{a-1}+bx^{a-b-1}$。因为$\int_0^1\frac{1}{x^{1-a}}$与$\int_0^1\frac{1}{x^{1-a+b}}$都收敛，所以$\int_0^1\left|f^{'}(x)\right|$也收敛，由于$\int_0^1 f^{'}(t)dt=f(x)-f(0)$

所以是 f（x）是 [0,1] 上的绝对连续函数，从而也是有界变差函数。

推论 4：假设 f（x）是 [a,b] 上的绝对连续函数，且 f'（x）在 [a,b] 几乎处处大于 0，则 f（x）为增函数。

证明 $\forall x_1,x_2\in[a,b], x_1>x_2$，因 f（x）是 [a,b] 上的绝对连续函数，则有

$$f(x_1)=f(a)+\int_a^{x_1}f^{'}(t)dt$$

$$f(x_2)=f(a)+\int_a^{x_2}f^{'}(t)dt$$

则$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f^{'}(t)dt$

由于 f'（x）在 [a,b] 几乎处处大于 0，则$\int_{x_1}^{x_2}f^{'}(t)dt\geq 0$，所以 $f(x_2)\geq f(x_1)$，即 f（x）为增函数。

5 结语

论文主要介绍了绝对连续函数（也称为全连续函数），对绝对连续函数与函数连续性，绝对连续函数与一致连续性的关系，绝对连续函数与有界变差之间的关系，绝对连续函数在微积分中与积分，微积分基本定理之间的关系等等方面作了一个简单的研究与讨论，为全面地理解绝对连续函数打基础。

参考文献

[1] 夏道行 . 实变函数论与泛函分析概要 [M]. 上海 : 上海科技出版社 ,1963.

[2] 陈建功 . 实变函数论 [M]. 北京 : 科学出版社 ,1978.

[3] 程其襄 . 实变函数与泛函分析基础 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2003.

[4] 华东师范大学数学系 . 数学分析第四版 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2010.