

# A Class Example of Algorithm and Programming Course——Calculation of Planetary Orbits

Wei Xie

College of Physics and Electronic Science, Guizhou Normal University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

## Abstract

Numerical calculation and program design courses inevitably require tedious algorithm derivation and lengthy code writing, in order to keep students to maintain a high degree of enthusiasm for learning and cultivate their enthusiasm for exploration, it is a very effective method to properly introduce some vivid and interesting examples in the teaching process to consolidate the algorithm taught. The paper takes the calculation of planetary orbits as an example, expounds the process of demonstration teaching in the course of numerical calculation and programming, and provides reference for relevant teaching staff.

## Keywords

numerical calculation; program design; planetary orbits; teaching example; ordinary differential equation

# 算法与程序设计课程的一个课堂示例——行星轨道的计算

谢伟

贵州师范大学物理与电子科学学院, 中国·贵州 贵阳 550025

## 摘 要

数值计算与程序设计课程不可避免地需要烦琐的算法推导和冗长的代码编写, 为了让学生保持高度的学习积极性并培养学生的探索热情, 在教学过程中适当地引入一些生动有趣的实例对所教授的算法进行巩固性的演练是非常有效的方法。论文以行星的运动轨道的计算为例, 阐述在数值计算与程序设计课程中的演示性教学的过程, 为相关教学人员提供参考。

## 关键词

数值计算; 程序设计; 行星轨道; 教学实例; 常微分方程

## 1 程序设计实例演示的意义

算法与程序设计是理工科本科生和研究生的一项重要的基本技能。为了培养学生的算法设计和编程能力, 几乎所有高校理工科专业都开设了《程序设计》《数值方法》《计算物理》等相关课程。算法与程序设计类课程的一个总的特点是, 将现实生活中各式各样问题的数学模型通过计算机语言编程进行实现。由于具体应用问题复杂多样, 计算机语言也是五花八门, 所以对于不同的学科专业, 开设的程序设计类课程往往具有反映本学科特色的针对性。虽然不同专业涉及具体应用问题各有不同, 但构造出的数学模型往往又集中于某些特定类型, 如函数插值或逼近、线性或非线性方程求根、常

微分方程或偏微分方程的数值求解等。从以上两个角度上来说, 算法与程序设计课程是算法统一性和问题多样性的有机结合。于是, 如何选择恰当的实际案例进行课堂教学, 是每个程序设计课程老师都需要认真考量的问题<sup>[1]</sup>。笔者的经验是: 选择课堂演示的实例应该集知识性与趣味性于一体, 同时又要让问题尽可能地简化。这样既能突出算法的核心内容, 又能在较为有限的时间内完成演示, 避免学生出现畏难情绪, 进而激起学生自主练习和深入探究的动力, 达到更长远意义的教学效果。论文以太阳系各大行星轨道的计算为实例, 说明常微分方程的数值解的应用。本实例对于从事算法与程序设计教学的教师有参考借鉴意义。



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}y \end{cases} \quad (8)$$

将该方程组写成向量形式:

$$\frac{dU}{dt} = F(U) \quad (9)$$

这里:

$$U = (U_1, U_2, U_3, U_4) = (x, y, v_x, v_y) \quad (10)$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} F_1(U) \\ F_2(U) \\ F_3(U) \\ F_4(U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ -\mu U_1 / (U_1^2 + U_2^2)^{3/2} \\ -\mu U_2 / (U_1^2 + U_2^2)^{3/2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

我们只关注太阳系的主要行星, 它们的轨道都是椭圆轨道。轨道半长轴  $a$  和偏心率  $e$  由机械能和角动量唯一确定:

$$K \equiv v^2/2 - \mu/r = -\mu/2a, \quad h \equiv r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

很容易得出在近星点处的速度为  $v = \sqrt{\mu(1+e)/[a(1-e)]}$ 。

设行星初始位置位于近星点, 于是有初始条件:

$$U(t=0) = (x, y, v_x, v_y) \mid_{t=0} = [a(1-e), 0, 0, \sqrt{\mu(1+e)/[a(1-e)]}] \quad (12)$$

更进一步, 为了计算的精度起见, 对变量进行无量纲化处理。为此, 我们规定三个基本单位。分别是时间单位  $[T]=1\text{day}=86400\text{s}$ , 长度单位  $[L]=1\text{au}=1.496 \times 10^{11}\text{m}$  和质量单位  $[M]=1M_{\odot}=1.989 \times 10^{30}\text{kg}$ 。需要注意的是, 与万有引力常数对应的导出单位为  $[G]=[L]^3/[M][T]^2=2.256 \times 10^{-7}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ 。

在计算中, 无量纲的  $\mu \approx \frac{GM_{\odot}}{[G][M]} = \frac{G}{[G]} = 2.958 \times 10^{-4}$ 。

我们用显式欧拉法和龙格-库塔法这两种典型数值方法求解上述一阶线性常微分方程组<sup>[3,4]</sup>。

欧拉法迭代格式为:

$$U^{n+1} = U^n + F(U^n)\Delta t \quad (13)$$

龙格-库塔法迭代格式为:

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)\Delta t \quad (14)$$

$$\begin{cases} F_1 = F(U^n) \\ F_2 = F\left(U^n + \frac{1}{2}F_1(U^n)\Delta t\right) \\ F_3 = F\left(U^n + \frac{1}{2}F_2(U^n)\Delta t\right) \\ F_4 = F(U^n + F_3(U^n)\Delta t) \end{cases} \quad (15)$$

表1 太阳系各行星平均轨道参数<sup>[2,5]</sup>

行星	平均半长径	偏心率 e	倾角 i(deg)	升交点黄 经	近点黄经
水星	0.38709893	0.20563069	7.00487	48.33167	77.45645
金星	0.72333199	0.00677323	3.39471	76.68069	131.53289
地球	1.00000011	0.01671022	0.00005	-11.26064	102.94719
火星	1.52366231	0.09341233	1.85061	49.57854	336.04084
木星	5.20336301	0.04839266	1.30530	100.55615	14.75385
土星	9.53707032	0.05415060	2.48446	113.71504	92.43194
天王星	19.19126393	0.04716771	0.76986	74.22988	170.96424
海王星	30.06896348	0.00858587	1.76917	131.72169	44.97135
哈雷彗星	17.83414429	0.96714291	162.26269	58.42008	169.75257

注: 基于论文的简化处理, 计算只用到半长径和偏心率这两个参数。

## 4 计算结果

根据上述分析解和数值算法, 使用合适的计算机语言(如 Python, Fortran, C, Matlab 等)对地球和其他各行星的运行轨道进行编程计算以及后处理。同时将数值解和分析解进行比较, 让学生从直观上感受数值计算的误差。

### 4.1 地球轨道

地球的轨道半长轴和偏心率分别为。由此设置初始条件后, 即可按欧拉法或龙格-库塔法进行轨道的数值计算。图2给出了一个轨道周期(从0变化到365天)的计算结果。从图2可以得出以下结论:

(1) 无论对于显式欧拉法, 还是龙格-库塔法, 计算精度都随着时间步长的减小而提高。

(2) 龙格-库塔法的精度明显高于显式欧拉法。

(3) 显式欧拉法实际上是不稳定的, 无论时间步长取多么小, 截断误差都会随着迭代的进行而越来越大, 因此如果试图进行长时间的行星轨道计算, 那么显式欧拉法并不可取。

(4) 龙格-库塔法存在一定的稳定域, 其截断误差不会在迭代过程中被不断放大, 因此是计算行星位置长期演化的有效方法。

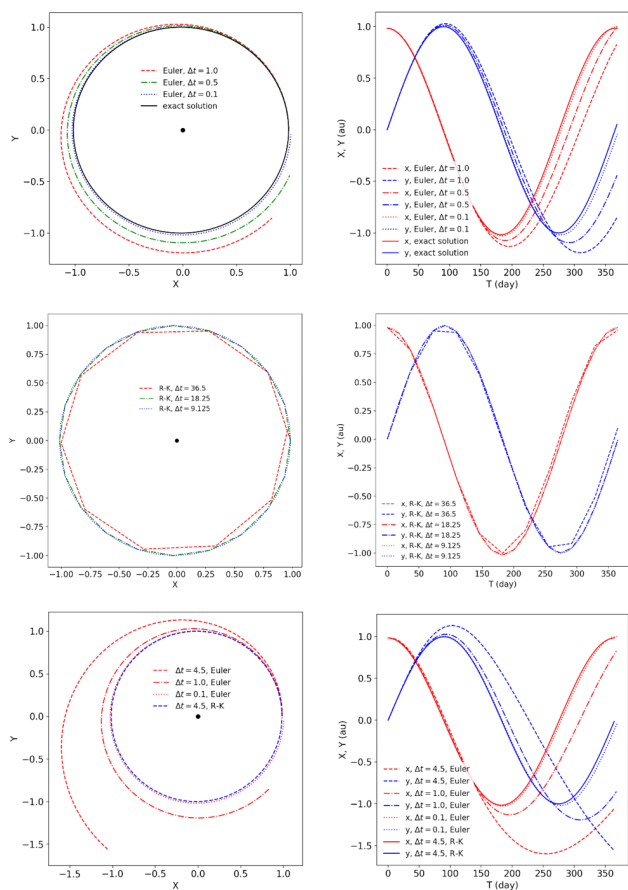


图2 地球公转轨道的计算

地球公转轨道的计算包括轨道总体形状以及地球的位置随时间的变化。上面两张图显示了三个时间精度下欧拉法的计算结果，实线展示精确解以便对比；中间两张图显示了三个时间精度下龙格-库塔法的计算结果；底下两张图显示了欧拉法和龙格-库塔法的对比结果。

关于显式欧拉法稳定性问题，这里略作说明。将迭代方程写为如下形式：

$$U^{n+1} = U^n + F(U^n)\Delta t = AU^n \quad (16)$$

对于显式欧拉法，系数矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ -\mu\Delta t/r^3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu\Delta t/r^3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$A$  的谱半径  $\rho(A) = \sqrt{1 + \mu(\Delta t)^2/r^3}$  恒大于 1，因此截断误差被不断放大，显式欧拉算法不稳定。在课堂上可以根据时间安排和问题需要，酌情考虑带着学生一起进一步分析隐式欧拉法、龙格-库塔法的稳定性。

## 4.2 太阳系各行星轨道

按照和计算地球轨道一样的程序，根据表 1 给的轨道长

轴和偏心率参数<sup>[2,5]</sup>，可以计算出太阳系所有八大行星和哈雷彗星的轨道，结果如图 3 所示。需要说明的是，为了突出算法，对模型进行了简化，假设各大行星轨道在共同的平面上，同时将各行星的近点角距取相等。

课堂进行到此可以告一段落。紧接着向学生再次强调图 3 只是初步的示意，与实际的天体运行相比忽略了很多细节。可鼓励学生对问题继续深入探讨以作为练习，从而达到对所学知识进行巩固的效果。

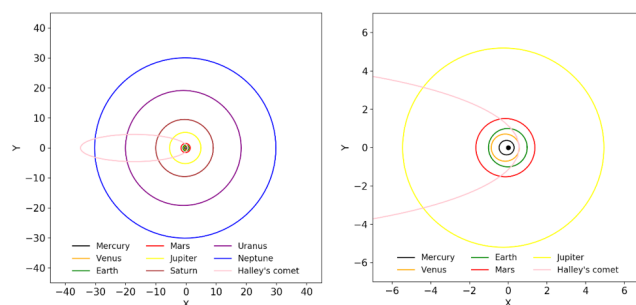


图3 太阳系八大行星和哈雷彗星的轨道。

为简单计算，将所有行星轨道的近星点方位取一致。

## 5 结语

“兴趣是最好的老师”，在教学过程中，将所要传授的核心知识点融入到学生较熟悉又感兴趣的现实问题中去，让学生体验用所学知识解决现实问题的乐趣，能让学生对知识的掌握更加牢靠，真正意义上的达到教学目的。论文以太阳系行星运动轨道这一问题为例，较为详细地介绍了模型构建、算法选择、模型计算以及科学结果可视化的完整过程，为数值计算及程序设计课程的演示教学提供了一个较好的参考案例。像这样难度简单、贴近现实、激起兴趣而又富有知识性的适合课堂示例的问题还有很多，需要从教人员善于发现和挖掘，争取让课堂更加生动而高效。

## 参考文献

- [1] 教育部西南高校师资培训中心. 高等教育学 [M]. 重庆: 重庆出版社, 2014.
- [2] 周济林. 天体力学基础 (讲义) [M]. 南京: 南京大学天文系, 2003.
- [3] 崔国华, 许如初. 计算方法 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [4] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [5] Yeomans D. K., Comet Halley. The orbital motion [J]. The Astronomical Journal, 1977(06):82.