 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i11.5568

Goldbach's Conjecture and the Solution of Related Propositions

Jinbang Ji

Abstract

Due to the limitation of length, the paper has three brief arguments-only points, and the main solution to Goldbach's conjecture, which has troubled the world for nearly 280 years. The three - number relation of the proposition is reduced to two - number relation, and the concept of vacancy number is put forward to get the solution of the proposition.

Keywords

remainder; missing number; complement by subtraction

哥德巴赫猜想及相关命题的解

冀金榜

摘　要

论文受篇幅限制有三个只点题略论证，主解困扰世界近 280 年的哥德巴赫猜想。将此命题的三数关系简化成两数关系，并提出缺数概念使命题得解。

关键词

余数；缺数；减余补缺

1 引言

哥德巴赫猜想作为世界近代三大数学难题之一，论文中涉及部分字母含义分别为：*D* 和 *d*（大）、*x*（小）、*h*（和）、*c*（差）、*g*（公）、*S*（实）、*L*（理）。

2 命题一

任何一个大于 10 的偶数，都可表为两奇素数之和。

2.1 和差关系

2.1.1 假设条件

设：*d* 和 *x* 分别为较大和较小的两个奇素数。它们和的一半用 *h*（*h* ＞ 5 为整数）表示；它们差的一半用 *c*（*c*≥0 为整数）表示。即；$h=(d+x)\div 2$；$c=(d-x)\div 2$。解方程组可得：$d=h+c$；$h-c=x$。将两式合并缩写为；$d(h\pm c)x$。

因为 *x* 的最小值为 3。所以 *c* 的最大值为 $h-3$。当 *d* 和 *x* 为孪生素数时，则 $c=1$。因此 *c* 存在于 1 至 $h-3$ 的自然数列之中，并称其为 *c* 数列。

特例：当 $c=0$ 时，$d=h=x$。此 *c* 用 *c*0 表示。故只要 *h* 为素数，就有 *c*0。

根据 *c* 的最大值，也能得 *d* 的最大值为：$h+h-3=2h-3$。

数列中只要有一个 *c*，就必有一对素数对应。例如：$h=9$ 时有两个 *c*，即 2 和 4。写为：11(9±2)7；13(9±4)5。

h 和 *c* 的意义：*h* 乘 2 就是命题的偶数，*h* 与 *c* 所得出的每一对素数都是它的解。因此 *h* 和 *c* 把命题简化成了两数关系。如果每个大于 5 的整数都有至少一个 *c*，则命题成立。否则命题不成立。

由此，把 *h* 看做是大于 5 的任意整数解 *c*，就是论文的脉络。

2.1.2 和差关系的图解

（1）设：*OA* 为大于 5 的整数线段，即 OA ＝ *h*。把握两点：*OA* 上的点均表示整数，其小数部分略去不计；表述顺序从左至右详见以下示意图。

B…………………*O*…………*P*…………*A*

（2）以 *O* 为圆心，将 *OA* 旋转 180 度，找到 *A* 的对称点 *B*，则 *BA* 必为偶数。且 *BO* ＝ *OA* ＝ *h*，*BA* ＝ 2*h*。相对于 *O* 的两边，各点都有对称点。

（3）在 *OA* 上有一动点 *P* 将 *BA* 分成了两整数。且 *BP* ＝ *BO*(*h*)+*OP*；

OA(*h*)−*OP* ＝ *PA*。将两式合并缩写为 *BP*(*h*±*OP*)*PA*。当

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i11.5568

BP 和 *PA* 同为素数时，*OP* 是 *c*；否则 *OP* 不是 *c*。

（4）*OP* 的数值体现就是自然数列，所以 *c* 数列中的每个数都是点 *P* 的一个位置简称点位。把点位的数量简称为点位量。

（5）*P* 不能到 *BO* 中去，即到 *O* 不过 *O*。此待后详释。

（6）*d* 的最大值 2*h*−3 是奇数，但不都是素数，故需鉴定。

定理：设 *α* 是任一大于 *1* 的整数，则 *α* 的除 *1* 外最小的正因数 *q* 是一质数，并且当 *α* 是合数时 $q\leq\sqrt{a}$ [1]。

因此，论文把小于和等于 $\sqrt{2h-3}$ 所有正的奇素数用 *t* 表示，其最大者用 *T* 表示。所以 2*h*−3 只要含 *t* 的因子就是合数。否则就是素数。

（7）*h*÷*t*，当不能被整除时就有余数，*t* 与余数的差称为缺数。例如：

26÷7=3…5，其缺数为 7−5 ＝ 2。写作 26/7[5 ，2]，读作 7 分之 26 余 5 缺 2。因为 *t* 不能被 2 整除。所以写在同一括号内的余缺两数、绝无相等的可能。且 *h* 减余或加缺后都能被其 *t* 整除，把此称为减余、补缺。

当 *h* 能被 *t* 整除时，论文定为既不余也不缺。

2.1.3 点位的鉴定原则

（1）偶奇相反原则

偶奇相反指 *h* 与点位的偶奇相反。否则 *BP* 和 *PA* 均为偶数，即能被偶素数 2 整除。

（2）余缺均克原则

余缺均克原则指的是根据减余补缺。用同一个 *t* 分别去除点位和 *h*，如点位的余数与 *h* 的缺数相等，*BP* 为合数；如点位的余数与 *h* 的余数相等，*PA* 一般也为合数。特殊情况是，和 3 一样，当 *PA* 等于其他 *t* 时，同样会遇到 *BP* 是否为素数。为此待后将专题论述，其点位用 *r* 表示，临用先验算解决。

（3）整除原则

因为能被同一数整除的两数之和、差都能被其整除。所以当 *h* 和点位都能被同一 *t* 整除时，其 *BP*（包括 *r* 的）必为合数。

上述原则虽没有回答那些点位是 *c*；但回答了那些点位不是 *c*。

2.2 解 c 的方法

根据点位的鉴定原则，用逐级淘汰（筛选）的方法，以 29 和 30 两连续数作 *h* 为例，探讨 *c* 的解法和步骤。因二者的 2h−3 分别为 55 和 57，故其 *T* 均为 7。

情况一：29 的 c 数列为 1，2，3，4，…，26

（1）根据偶奇相反。29 为奇数，所以只选择数列中的偶数，淘汰掉奇数。把此定为一级淘汰。保留的是：2，4，6，8，…，26。

（2）根据余缺均克进行二级淘汰。因为 29/3 [2，1]，所以只保留能被 3 整除的点位，不能被 3 整除的全部淘汰，因为它们非减余既补缺。但 26 是 *r*，验算：29+26=55，所以 26 不是 c。数列变为：6，12，18，24。

（3）三级淘汰 29/5[4，1]，6 的余数补缺被淘汰。而 24 是 *r* 验算：29+24 ＝ 53，显然 24 是 *c*。变为：12，18，24。

（4）29/7 [1，6]，用 *T* 淘汰为终级淘汰。显然已没有减余补缺的数。

因为 29 是素数，所以有 c0。至此 29 的 c 全部解出。写为：

29(29±0)29；41(29±12)17；47(29±18)11；53(29±24)5。

情况二：30 的 c 数列为：1，2，3，4，…，27。

就其方法步骤，前例已作详述，此题只简述求解。

（1）根据鉴定原则（1）和（3）。30 是能被 3 和 5 整除的偶数。故只保留不能被 3 和 5 整除的奇数。数列变为：1，7，11，13，17，19，23。

（2）30/7[2，5]，19 补缺被淘汰。23 是 *r*，终级直接保留，依据见下文。解得六个 *c* 即：1，7，11，13，17，23。

此解法对大于 5 的整数都适用。且确保 *c* 无一漏网，更不会无中生有。

x−*d* 的一半，则 *c* 为负，其绝对值与正数的相等，数量一致。即 *OP* 是 *c* 时，动点 *P* 在 *BO* 上的对称点。对这种变方向的重复，论文只说明不讨论。举例简言之 12=7+5=5+7，论文只讨论 7+5，不讨论 5+7。

2.3 对有关问题的论证

2.3.1 起值公式

因 $T\leq\sqrt{2h-3}$。当二者相等时则由 T= $\sqrt{2h-3}$ 得 $h=(T^2+3)/2$。将各奇素数代入此式，即可得到相应的 *h* 值。此值就是 T 的起点值，简称起值，称此式为起值公式。所以 3,5,7,11，…的起值分别为 6,14,26,62，…详见文后附表。因此 *h* 就被从小到大的奇素数、分割成了无数个区间。因为 3 的起值为 6，所以定为 *h* ＞ 5，而命题定为大于 10。

2.3.2 关于 *r*

（1）如 *r* 不是出现在终级淘汰。处理方法有两种：一是

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i11.5568

验算直接取舍；二是继续参加淘汰程序。PA 虽为素数，其 r 毕竟减余。而余缺两数又不等，所以本级不会补缺。如 r 不是 c 只能给其他 t 补缺。如能保留到最后其就是 c。也因此终级淘汰出现的 r 就是 c。被确定为 c 的 r 用 rc 表示。

（2）因为当 h 能被 t 整除时本级无 rc。所以不一定每个 h 都有 rc。对有的来说，也不一定都只有一个。

2.3.3 排除干扰

为排除 $c0$ 和 rc 对以下讨论的干扰。令 $c > 0$，$x(PA) > T$。所以最大点位由 $h-3$ 应降至 $h-T-1$，而其与 h 同偶奇，因此再降一个即从 1 至 $h-T-2$ 的点位中解 c。所以在每个区间里，h 的大小仍是影响点位量的唯一因素。

2.3.4 连续律

连续律即 h 的 c 数列被 t 瓜分的规律。

（1）借鉴挂历的排列，每连续 3 个数中，能被 3 整除和余数为 1 与 2 的各有一个，即 3 种形态；每连续 5 个数中，能被 5 整除和余数为 1、2、3、4 的各有一个，即 5 种形态；…。因此按形态点位被 3 分成了 3 份，被 5 分成了 5 份，…，被 T 分成了 T 份。

偶数点位可以这样分，奇数点位同样可以这样分。且同级中各份的点位量都相等或基本相等（相差只有 1 个），即每种形态均占 $1/t$。论文把点位被 t 按形态瓜分的规律，简称为连续律 [1]。

（2）连续律还体现在相互之中。即每 5 个能被 3 整除（余数为 1 或 2）的连续数，对 5 都具备连续律。

设：g 是 3 和 5 的公倍数。g；$g+3$；$g+6$；$g+9$；$g+12$。是能被 3 整除的五个连续数。分别被 5 除其余数分别为：0，3，1，4，2。所以连续律成立。

$g+1$；$g+3+1$；$g+6+1$；$g+9+1$；$g+12+1$。是 5 个被 3 除余数为 1 的连续数，同样能得出以上结论；被 3 除余数为 2 的五个连续数，结论也一样。

而 g；$g+6$；$g+12$；$g+18$；$g+24$ 五个被 3 整除的连续数，其偶、奇以 g 而定，同样能得出以上结论。连续余数的，结论也无异。

同理，每 7 个能被 3 整除（余数为 1 或 2）的连续数及每 7 个能被 5 整除（或余数为 1、2、3、4）的连续数，对 7 来说连续律都成立。依此类推直至 T。

（3）翻过来也一样。既…每 3 个能被 7 整除（或余数为 1、2、3、4、5、6）的连续数中，能被 3 整除和余数为 1 与 2 的各有一个；…。因此淘汰顺序上哪级在前哪级在后，对结果没有影响。

2.3.5 点位的淘汰率和保留率

根据鉴定原则和连续律：

（1）偶奇相反的这级是取舍各半或基本各半淘汰率和保留率均为 1/2。

（2）当 h 不能被 t 整除时，本级需淘汰减余和补缺的两种形态。淘汰率是

最高的为 $2/t$；保留率为 $(t-2)/t$。

（3）当 h 能被 t 整除时，本级只需淘汰能被整除的一种形态。淘汰率为 $1/t$；保留率为 $(t-1)/t$。

2.4 解 c 的数量

2.4.1 c 与 h 的量比关系

（1）假设 1

设：S（$S \geq 0$ 是整数）为 c 的实际数量；L 为其理论数量；每级都暂写为最高的淘汰率，即最低的保留率。根据点位量得如下关系：

$$L = (h-T-2) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{11} \times \cdots \times \frac{T-2}{T}$$

$$= \frac{h-T-2}{2T} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{11} \times \cdots \times (T-2) \quad \text{（1 式）}$$

（2）假设 2

设：$a = \dfrac{h-T-2}{2T}$,$b = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{7} \times \dfrac{9}{11} \times \cdots \times (T-2)$，则 $L = ab$。

由于连续律中的“基本相等”，使 S 与 L 难免存在误差。

2.4.2 对量比关系式的分析

因为式中的 h 是变量，所以每个点位的取舍也不固定。因此只能说：

每级被淘汰的点位量 $=(h-T-2) \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{t}$。

每级被保留的点位量 $=(h-T-2) \times \frac{1}{2} \times \frac{t-2}{t}$。

以上两式表示的是偶、奇数点位，对 t 都包含如下两种含义。

（1）t 个点位中有 2 个被淘汰；$t-2$ 个被保留。

（2）每个点位都有 $2/t$ 被淘汰的可能，同时也都有 $(t-2)/t$ 被保留的可能。即对 3 来说都有 2/3 被淘汰的可能，都有 1/3 被保留的可能；对 5 来说都有 2/5 被淘汰的可能，都有 3/5 被保留的可能；…。

经 3 这一级淘汰后，保留下来的每个点位仍存在；对 5

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i11.5568

来说有 3/5 被保留的可能；对 7 来说有 5/7 被保留的可能；⋯。再经 5 淘汰后保留下来的每个点位仍存在对 7 来说有 5/7 被保留的可能，对 11 来说有 9/11 被保留的可能。如此类推下去直至 T。为加深理解和验证再举一例。

如：h=256，是 2 的 8 次方，T=19。最大点位取 235。

前三级易理解，经淘汰实际保留下来 23 个点位。排成 3 列连续数即：3、33、63、93、123、153、183、213。15、45、75、105、135、165、195、225。27、57、87、117、147、177、207。

理论数为：$(256-19-2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\approx 24$ 个。

剩下的 5 级顺序任选。但无论采取哪种顺序最终都解得 S=9 个 c。

即：93、153、183；15、75；27、57、117、177。

对应上述顺序理论数最终都是 $L\approx 9$ 个 c。

此例具备普遍意义。因此，结论有二：一是量比关系的理论成立。二是 S 与 L 存在误差。

2.4.3 取决于 b 大小的因素

（1）h 的类型

当 h 能被 3 整除时，本级淘汰率为 1/3，保留率为 2/3，

$b\geq 2$；当 h 还能被 5 整除时，本级淘汰率为 1/5，保留率为 4/5，$b\geq 8/3$。依此类推。由此可见，从数量上说含有 t 因子越多的数 b 越大；从大小上说含有 t 因子越小的数 b 越大。且只要含一个 t 因子，则 $b>1$。

（2）T 的大小

不含 t 因子的 h 有三类，各级淘汰率均最高。一是大于 T 的素数；二是 2^n（n 为正整数）的数；三是以上两类数乘积的数。对这些数来说当 $T\leq 7$ 时，$b=1$；当 $T\geq 11$ 时 $b>1$。详见文后附表。

总之 $b\geq 1$。应指出 b 虽有最小值，但无最大值。

2.4.4 取决于 a 大小的因素

（1）在每个区间里即 T 一定时，h 越大 a 也越大。因为起值都是区间的起点即最小值，因此在各区间内起值也都是 a 的最小值。

（2）a 与起值的关系：将 $T>3$ 的各起值带入式中其结论是 a 随起值的增大而增大，即 $a=\dfrac{14-5-2}{10}>0$；$a=\dfrac{26-7-2}{14}>1$；$a=\dfrac{62-11-2}{22}>2$；⋯。同样 a 也无最大值。任选其一作为临界值，论文选择 T=7，则 $a>1$

$\because L=ab$，$b\geq 1$。$\therefore T=7$, 则 $L>1$。

2.4.5 关于误差

（1）误差说明

因为 L 是纯数值计算的结果，而实际上每个点位本身不能再分割，即有连续律中的基本相等。所以 S 围绕着 L 上下浮动。因此部分 h 的 $L>S$ 不可避免。而这、不能完全证明 c 存在的必然性。

（2）应对误差的措施

措施一：b 只取其最小值 1，则：

$$L=\frac{h-T-2}{2T} \qquad （2 式）$$

措施二：2 式的 L 表示的是把 h 的点位分成 $2T$ 份后其每份的点位量。理解为：首先分成了偶、奇两大份；然后又各都按形态分成了 T 小份。L 中每份都减 1 个其点位量为 $2T$ 个，则：

$$L=\frac{h-T-2-2T}{2T}=\frac{h-3T-2}{2T} \qquad （3 式）$$

根据“基本相等”的含义，上述每一份的实际点位量都大于 3 式的 L。

$\therefore$ 3 式的 $L<S$。

总之 h 的同类数比较，c 随 h 的增大而增多并伴有小幅波动，就是它们量比关系的实际。这种波动 L 中也有所体现。如 h 为 22 与 26，它们的 b 相等，由于 T 的差异使 a 的大小倒置。类似实例举不胜举。

2.5 结论

将 T=7 则 $L>1$ 带入 3 式得 $\dfrac{h-21-2}{14}>1$，解得 $h>37$。

即 $h>37$, 则 $L>1$。而 S 是整数，且 3 式的 $L<S$。

$\therefore$ 大于和等于 37 的每一个整数，至少有两个 c 且不包括 $c0$ 和 rc。

再穷举解出 6 至 36 每个整数的 c（略）。

$\because$ 每个大于 5 的整数都有 c。$\therefore$ 命题成立。

2.6 关于素数差的说明

（1）因为两奇素数和的一半是 h，两奇素数差的一半是 c。既然已知 h 可解 c，则已知 c 也可解 h。二者互为逆运算。为使 BP 和 PA 同为素数。前者是对 P 的点位选择，而后者是将 A、B 两点作等量伸缩。前者 A 和 B 是定点，P 是动点，后者 P 是定点，A 和 B 是同动点。

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i11.5568

（2）既然每个 h 都有 c，根据点位的鉴定原则，每个点位也都有作 c 的机会，因此任一偶数都可写为两素数的差。

（3）因为 $h > c$，所以任何一个 h 的 c 都是有限的，而适合一个 c 的 h 都具无限性的可能。

3 命题二

命题：孪生素数有无限个

3.1 命题含义

本命题的求证以以上内容为基础，有三层含义。一是利用其结果，二是所用符号一致，三是所用相同或相近的词及部位不再解释。

3.2 起值公式

孪生素数的 c 为 1, 是不能被 3 整除的奇数。所以，h 必为能被 3 整除的偶数。且 A 的点位相对 t，余缺两数均不能为 1。起值公式为：$h=T^2-1$。所以 3，5，7，11…的起值分别 ,8，24,48,120，…。

3.3 例题

例题选在 T 为 7 的区间内。经前两级淘汰保留 A 的点位为 48,54,60,66,72,78,84,90,96,102,108,114。相对 5 来说，54，66,84,96,114 被淘汰；相对 7 来说，48,78,90 被淘汰，保留 60,72,102,108。

写　为：61(60±1)59；73(72±1)71；103(102±1)101；109(108±1)107。

3.4 点位量式

设：与 T 相邻且大于 T 的素数为 D。根据起值公式，每个区间 A 的点位量为：[（D^2-1-1）−（T^2-1-1）]$=D^2-T^2$

3.5 假设条件

设：每个区间 h 的理论数量为 R。根据点位量和连续律及两率得：

$$R=(D^2-T^2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times\frac{T-2}{T}。$$

$$=\frac{D+T}{T}\times\frac{D-T}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times(T-2)。$$

$$\because\frac{D-T}{2}\geq 1；\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{9}{11}\times\cdots\times(T-2)=b\geq 1。$$

3.6 结论

若以上两部分均取其最小值 1，并考虑误差因素。

$$\therefore R=\frac{D+T-1-T}{T}=\frac{D-1}{T}>1。$$

$\therefore$ c 为 1 的 h（孪生素数），每个区间至少有两个。

$\because$ 素数是无穷的，区间也就无尽，孪生素数也就无限。

$\therefore$ 命题成立。

同理，两素数的差为 4，6，8，10…的都有无限个。只是随着 c 的增大需对 T 的最小值作适当限制而已。

4 其他（论证略）

（1）任仨等差的正整数中，大小两数的平方分别被中间的数除所得余数相等。

（2）任一大于 3 的素数其平方被 24 除余数都是 1。

（3）仅有 75% 的整数能写成俩整数的平方差。

附表：

百内 T 的起值及对应区间 b 的最小值

T	起值	b	T	起值	b
3	6	1	43	926	2.29
5	14	1	47	1106	2.39
7	26	1	53	1406	2.60
11	62	9/7	59	1742	2.79
13	86	9/7	61	1862	2.79
17	146	1.48	67	2246	2.97
19	182	1.48	71	2522	3.06
23	266	1.63	73	2666	3.06
29	422	1.92	79	3122	3.23
31	482	1.92	83	3446	3.32
37	686	2.17	89	3962	3.48
41	842	2.29	97	4706	3.71

参考文献

[1] 管训贵 . 初等数论 [M]. 中国科学技术大学出版社 , 2011.