Reflections on Teaching *Complex Variable Functions and Integral Transforms*

Chuangxin Chen[1] Shuangting Lan[2*] Lin Wang[3] Huansheng Wu[5]

1. College of Computational Sciences, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou, Guangdong, 510225, China
2. School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510665, China
3. Chaonan District Xiaosheng Middle School, Shantou, Guangdong, 515144, China
4. Shantou Liudu Middle School, Shantou, Guangdong, 515144, China

Abstract

In view of the teaching reform of *Complex Variable Functions and Integral Transforms* in mathematics course, this paper puts forward some practical exploration suggestions.

Keywords

complex variable functions and integral transforms; teaching reform; exploration in practice

《复变函数与积分变换》教学的一些思考

陈创鑫[1] 蓝双婷[*2] 王 琳[3] 吴焕生[4]

1. 仲恺农业工程学院计算科学学院，中国·广东 广州 210225
2. 广东技术师范大学数学与系统科学学院，中国·广东 广州 510665
3. 潮南区晓升中学，中国·广东 汕头 515144
4. 汕头市六都中学，中国·广东 汕头 515144

摘　要

针对数学课程《复变函数与积分变换》的教学改革，论文提出了一些实践探索的建议。

关键词

复变函数与积分变换；教学改革；实践探索

1 引言

《复变函数与积分变换》是中国高校数学专业和理工科专业中一门重要的基础课并非言过其实，它不仅是计算机类专业的一门重要的课程，也是其他专业如电子类、机械类各专业及热能专业的一门重要学科，而且本科高年级乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可视为它的延伸。深化或应用它的基本概念、思想和方法更可以说是无处不在，在培养具有良好素质的数学及其应用人才方面起着重要的作用。

在教学过程中，我们应该重视复变函数数学思想的渗透以及数学方法的教学，使学生在复变函数的学习的过程与发现过程同步，促进学生数学思维结构的形成，发展与数学的思维结构相似、相近，更好地提高学生的数学能力，也让有志于科学研究的学生打好扎实的专业基础。因此，对《复变函数与积分变换》这门课程的教学作一些理性的思考，提高教学质量，显得十分重要和紧迫。

2 注重与高等数学的异同，学习迁移

我们知道，复变函数是对中国高等数学中微积分内容的深化，变换思想和极限思想是微积分理论的主要数学思想。

【基金项目】国家自然科学基金（项目编号：11801110）；广东青年创新人才项目（项目编号：2018KQNCX117）；本科教学质量与教学改革工程项目（项目编号：KA200190327）。

在数学史上，常量数学向变量数学的转变是一个伟大的转折，其中起指导作用的数学思想就是反映常量与变量的对立统一关系的变换思想，其重要成果就是研究函数的微积分理论，这正是高等数学与初等数学的主要区别。

在高等数学中，研究的函数对象是定义在实数集 R 上的实变量函数 $f(x)$，$x \in R$，而复变函数的研究对象则是定义在复平面 C 上的复变量函数 $f(z)$，$z \in C$，两者最初的讨论思路很接近，都是按极限—连续—导数—积分这个顺序来进行定义的，这个定义的过程在形式上也是非常接近。例如，实变量函数极限的定义是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而复变量函数极限的定义是 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$。可以看到，如果把点 x,z 都记作点 P，把点 x_0,z_0 都记作点 P_0，那么上述两个极限定义都可以记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$。

当然，这只是形式上的相同而已，本质上却是截然不同的。我们通过《复变函数与积分变换》的教学指出，解析函数是我们这门课的主要研究对象，解析函数的性质是我们的主要研究内容，幂级数法、积分法等是常见的研究解析函数的方法。我们不仅要讲清楚定义在实数集 R 上某区间的实函数极限与定义在复平面 C 内某区域的复函数极限的不同，实导数与复导数、实积分与复积分的不同，而且还要指出实函数与复函数的本质区别，即一维实数轴上区间内点的逼近方式与二维复平面区域内点的逼近方式的不同 [1]。而正是这点区别，造成了实变量函数与复变量函数在极限、连续、导数等定义上有着本质的区别，也正是因为这点本质区别，我们才能从观念上、方法上以及应用上产生质的飞跃，也正因为这样才能使这门课的教学更接近数学教学实际，使学生能尽快从实变量函数思维转到复变量函数思维，适应复变函数的学习方法。高等数学的知识结构越丰富、越完整、越系统、越清晰，学生就越容易分辨实函数与复函数知识框架的一些形式上的相同，本质的天壤之别，新旧知识的碰撞引发学生思维火花，迁移越容易产生，学生的认知结构更加丰富 [2]。

3 培养复变函数能力

复变函数能力指的是人们在复变函数学习实践中运用已经习惯与掌握的复变函数相关知识（复变函数方法、技能、技巧等）去进行更深层次求知习能的各种实际才能，它还要求人们具有某种程度的见解、判断力、能动性和创造精神。

一直以来，为适应各个时代背景下的社会、经济和科学技术的发展，教学改革活动在世界上不少国家出现了一个又一个波峰。教学改革实践反映的是当代人的教育观与教学论，其理论框架和研究中心也发生了明显的变化和转移，这种变化和转移的标志之一就是重视和研究学习方法和数学思想。学习是一种认知活动，在学习活动中，学生是“学”的主体，是学习行为的执行者，学习对象是某门课程或技能，教师是“教”的载体，起着指导、帮助和组织的功能，是桥梁作用——连接学生与教学内容的桥梁。在教学过程中，学生这个学习行为的执行者必须充分发挥其独立性、探索性和创造性，提高自身的学习能力，并在认识学习的实践活动中不断磨炼并成长。因此，学生必须学会如何学习，并将知识转化为能力。对教师来说，需要培养正确的学习态度，在教学过程中有意识地加强数学思想的渗透，某些方面的思维训练，这些在复变函数这种理论与实践过度的科目中无疑比其他学科更重要。在复变函数中，能力比起单独具有一些知识要重要得多。因此，教师应当在传授学生一定数量知识的同时，还应教会学生一定的比较、分析、判断、解题的能力 [3]。

4 激发创新意识，培养创新思维

创新意识是人们对创新与创新的价值性、重要性的一种认识水平、认识程度以及由此形成的对待创新的态度，并以这种态度来规范和调整自己的活动方向的一种稳定的精神态势 [4]。创新精神则是敏锐地把握机会，敢于付诸探索行为的精神状态，创新思维正是在这种创新精神状态支持下的实践活动。教师通过精心设问，巧妙构思来引导学生积极探索，把创新的主动权交给学生。不妨采用以下方法。

4.1 启发式教学

从教育学、心理学角度提出的这一真知灼见，是一条重要的教学原理。根据这一指导思想，教师不宜过早地告诉学生全部结论，不应将全部奥妙和盘托出。就如同画家作画时特别讲究“留白”一样。某著名画家就说过的：“最糟糕的画就是把整张纸都画满了”。教师可以围绕讲授的中心问题，故布疑阵、搭桥铺路、创造问题情境，有意地设置一个“攻”“围”的态势，以退为进，引而不发。教师通过敲边鼓，点拨诱导，使学生自己脑海里迸发出来思维的火花，最终走过“重重迷宫”，醍醐灌顶般地自己得出课本中的结论，从而觉得复变函数就是这么简单好玩，感觉复变函数离自己就是如此之近。“催化剂”“助燃剂”就是教师起着潜移默化的作用。对于

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i13.5815

启迪学生、训练思维和创造性思维极为有利 [5]。

4.2 巧设悬念，激发兴趣

悬念，从心理学角度来讲，就是人的一种强烈的欲念和紧迫心理，这种心理一旦达到某种程度，就具有很大的诱惑力，即是我们俗称的好奇心。教师在教学过程中巧设悬念，布阵设疑，引起学生对某个知识的好奇心，给学生造成一种跃跃欲试和急于求知的紧迫心情，激发兴趣和勇于探索，这样可以起到“欲知后事如何，且听下回分解”的效果。

4.3 翻转课堂，以“生”为主

在翻转课堂教学模式中，知识的学习是学生在课前通过观看教学视频等手段来完成的，知识吸收则变为在课堂中通过教师和同学协作学习完成，从而完成了课堂的翻转。学生在课前观看教师制作的视频或其他教学资源，在自学完成后通过习题测试自学效果，如果没有达到要求便返回去重新学习；而在课堂中的活动则包括针对学生自学过程中无法自己解决的问题由教师进行详细讲解，师生间的交流互动，学生完成作业等内容，汇报展示等内容。

翻转课堂是通过技术对教学结构的改变，它就使我们教和学的顺序以及学生和教师传统的功能发生了变化，对学生和教师的要求也有了新的变换。过去我们是在学校里面上新课，现在学生在宿舍、在课前通过微课、通过学习任务单来自主实现知识传授的任务，到了课堂教学环节，在教师的指导下做作业、参加研讨、个别化辅导，一步步拓展、提高、拔高来实现知识内化的任务、拓展延续的任务，从而对课堂教学进行精中细作。

5 处理好课堂内容与教材之间的关系

如何处理课堂内容与教材内容之间的关系，历来都是教师在备课时必须面对的一个不易掌握分寸的现实问题。学生既讨厌教师照本宣科，又反感授课内容离教材过远课后复习无处寻觅，无迹可寻。教材为教学提供了一个基本框架和素材，教师应该熟悉各种同类教材的编写特点，吸收其长处。在备课时，综合考虑学生的知识储备、教学课时设置、教学大纲要求等因素，对教材内容进行精选和加工改编，以便课堂讲授和学生易于掌握。这类似于小小说改编成电视剧的过程，教师集“编剧”“导演”“演员”“编辑”于一身，经过这种“再创作”，呈现在课堂上的就是源于教材、紧扣大纲、适合学生而又非照搬教材的内容，这一过程特别能体现教师的知识储备和教学功底。一般来讲，课堂内容与教材的关系既要做到若即若离，又要做到如影随形，具体到复变函数不同章节内容、不同专业的学生应有不同的分寸，不同的难度。

6 因势利导，举一反三

教师根据以往积累的经验和资料，授课时故意沿一条错误的思路向前走（一般错得比较隐蔽，学生稍微不注意就不易发觉）。例如，有意给出某个定理几种错误的证明方法，或对某个题目给出典型的错误解法，很多学生往往上当受骗，于是，对定理公式等知识点存在的模糊认识和错误概念纷纷暴露。然后教师指出谬误所在（如给出反例），再次强调重点内容，引导学生进行分析反思。当学生恍然大悟之后，教师再因势利导，引出正确的思路和方法，并再引导学生去拓宽加深。于是，学生在新旧知识冲击中，正误对比，反复琢磨反例和拓宽加深中，巩固了旧知识，吸取了教训，掌握了新知识。这样做，往往可以收到直接正面讲解所达不到的效果，给学生留下了深刻的印象。针对下面这样一道习题进行分析。

例：设在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n(0<a<1)$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径。

先这样处理：容易验证，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径都等于 1，但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 的收敛半径为 R：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{1+a^n}\Big/\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a^{n+1}}{a(1+a^n)}=\frac{1}{a}>1.$$

这就是说级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 自身的收敛圆域大于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n$ 的公共圆域 $|z|<1$。

直接用公式求出级数的收敛半径，教材上是这样教导的，这样处理也是比较正规的，不少学生也看没发现有什么问题。从表面上看，每一步都没毛病，公式也没用错，好像是对的。作为教师，可以这样提问：“前两个级数收敛半径都等于 1，其差所得的级数收敛半径去大于 1，就像两个 100 斤的人在一起称却得到 210 斤，这有没有不合理的地方呢？”

通过这样的类比再向学生说明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 自身的收敛圆域确实要大于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n$ 的公共圆域 $|z|<1$。

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i13.5815

这样的事实仅仅针对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 自身而言的时候是对的。但在这个题目中，我们要注意到级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 是由级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n$ 求和得到的，而后面的两个级数在 $|z|\geq 1$ 时是没有意义的，更不用说对其进行四则运算。从而，使等式 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{1+a^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$ 成立的收敛圆域应为 $|z|<1$，不能扩大。

在此基础上，再引导学生去延伸，这样学生不仅加深了对级数收敛圆域的认识，而且掌握了这一类问题的正确处理方法。

7 充分利用信息技术

将先进的教育技术手段融入教学活动中，利用多媒体教室，还可利用 Powerpoint 演示教学内容，用 Mathematica 编程制作复杂的空间图形和动画，为学生演示以往粉笔板书难以描绘出来的空间几何图形，帮助学生对几何图形一目了然，实现近乎全真的直观教学，达到板书及言语无法达到的境界。多媒体与传统教学手段的结合，可以起到互补的作用并达到提高教学效果的目的。

参考文献

[1] 王梓坤 . 今日数学及其应用 (上)[J]. 知识就是力量 ,1998(06):46-47.

[2] 王梓坤 . 今日数学及其应用 (下)[J]. 知识就是力量 ,1998(07):46-47.

[3] 徐利治 . 数学方法论选讲 [M]. 武汉 : 华中工学院出版社 ,1998.

[4] 同济大学数学系 . 高等数学 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2014.

[5] 张建国 , 李洍岸 . 复变函数与积分变换 [M]. 北京 : 机械工业出版社 ,2010.