Application of Symmetry of Function Image in College Entrance Examination

Jianlong Zhang

Qingyang No.4 Middle School, Qingyang City, Gansu Province, Qingyang, Gansu, 745000, China

Abstract

In recent years, no matter how the college entrance examination reform, the application of the nature of function as a logical reasoning ability inspection point, always occupies an important position in the college entrance examination, among which the symmetry and monotony of function are the most popular, this paper aims at the application of function symmetry.

Keywords

college entrance examination; symmetry of function; parity; application of symmetry under non parity

函数图象的对称性在高考中的应用

张建龙

甘肃省庆阳市庆阳第四中学，中国·甘肃 庆阳 745000

摘　要

近年来无论高考如何改革，函数的性质的应用作为逻辑推理能力考察点，始终在高考中占有重要地位，其中以函数的对称性、单调性相互结合的问题最热门，论文针对函数对称性的应用进行整理。

关键词

高考；函数的对称性；奇偶性；非奇偶性下的对称性的应用

1 引言

众所周知，函数历来是高考的重点内容之一，高考对函数的考查离不开函数性质的研究应用，特别是函数的单调性与奇偶性更是高考命题的热点，理应成为高三复习的重点。函数图像的对称性作为奇偶性拓展与延伸，在各类高考试题和模拟题中更是屡见不鲜，同时也是出错率非常高的题目。

如果从图象的角度审视函数，有两类比较特殊的函数：一类是它们图象成中心对称；另一类是它们图象成轴对称，那么这样的函数具有什么性质呢？不难发现，这两类函数图象总可以通过适当的平移，转化为具有奇偶性的函数，论文对有关函数对称性和奇偶性的性质做了总结。

2 命题方向一：基于函数，考查运算能力

这类题目一般都会给出函数的解析式，目标是求函数值或由函数值求相应的自变量的值，着重考查考生的运算能力和逻辑思维能力。这类题目不是简单的求值或解方程，而是要考查考生如何如何合理地选择运算路径，即从函数解析式出发，结合函数的奇偶性、单调性、周期性进行运算，达成目标 [1]。

【例 1】已知 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)=f(x)+9$，$g(-2)=3$，则 $g(2)=$____。

【解析】解法一：由题意得 $g(-2)=f(-2)+9=3$，$f(-2)=-6$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(2)=6$，$g(-2)=f(2)+9=15$。

解法二：因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 图象关于（0,0）点成中心对称；将 $f(x)$ 沿着 y 轴向上平移 9 个单位长得到 $g(x)$ 的图象，所以 $g(x)$ 图象关于（0,9）点成中心对称，由第五条结论可知：$g(-x)+g(x)=18$，所以 $g(-2)+g(2)=18$，$g(2)=15$。

【例 2】已知函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+4(a,b\in R)$，$f(\lg(\log_2 10))=5$ 则 $f(\lg(\lg 2))=$____。

【解析】因为函数 $g(x)=ax^3+b\sin x$ 为奇函数，图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 图象关于点（0,4）对称，即有

$f(x)+f(-x)=8$。而 $\lg(\log_2 10)=\lg\left(\frac{1}{\lg 2}\right)=-\lg(\lg(2))$，所以 $f(\lg(\log_2 10))+f(\lg(\lg 2))=8$，又 $f(\lg(\log_2 10))=5$，所以 $f(\lg(\lg 2))=3$，选 C。

【评注】这两道题都是考查函数奇偶性的常规问题。由函数解析求定量的函数值，代入计算是最直接的想法，但有时是行不通的。要解决这两个类似的问题，首先考生要熟练掌握函数的奇偶性的性质，函数图象平移的基本法则，其次是对数的化简；进而联想到互为相反数的函数值与函数奇偶性之间的关系；分析函数 $f(x)$ 的特征，建立与函数奇偶性的联系，这是这两道题的能力要求之所在。

【例 3】设函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$____。

【解析】因为 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=1+\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$，又 $g(x)=\frac{2x+\sin x}{x^2+1}$ 为 R 上的奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于（0,1）点成中心对称，从而 $f(x)$ 的图象上的最大值点与最小值点也关于（0,1）对称，因此 $M+m=2$。

【评注】本题貌似一道最值问题，实则为一道函数奇偶性的应用问题，与前两题比较，对奇偶性的应用隐藏得更深，要求考生要有敏锐的观察能力。命题者对函数解析式结构进行适当的“伪装”，只有适当变形，揭露其本质，才是解题的关键点。

【例 4】已知函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$，则 $f(-\frac{5}{2}+\sqrt{2})+f(-\frac{5}{2}-\sqrt{2})=$____。

【解析】

$$\begin{aligned}f(x)&=4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)\\&=4-\left[\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\right]\\&=4-(2x+5)\left(\frac{1}{x^2+5x+4}-\frac{1}{x^2+5x+6}\right)\end{aligned}$$。

因为 $y=\frac{1}{x^2+5x+4}-\frac{1}{x^2+5x+6}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{5}{2}$ 成轴对称，直线 $y=2x+5$ 关于点 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ 成中心对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{5}{2},4\right)$ 成中心对称。

因此，$f(-\frac{5}{2}+x)+f(-\frac{5}{2}-x)=8$，即 $f(-\frac{5}{2}+\sqrt{2})+f(-\frac{5}{2}-\sqrt{2})=8$。

【评注】相比例 2、例 3，本题的难度自然要大得多，同样是用函数图象的对称性解题，但是“伪装”得更加深而已，因此对考生的观察能力和知识点的综合应用能力提出了更高的要求。当然，如果直接代入计算，也是可行的，只是过程显得有点“恐怖”。而思维灵活的同学，如果考虑 $f(x)+f(-5-x)$，则过程更显简洁。

$$f(x)+f(-5-x)=\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}\right)+\left(\frac{-x-5}{-x-4}+\frac{-x-4}{-x-3}+\frac{-x-3}{-x-2}+\frac{-x-2}{-x-1}\right)=8$$

【例 5】设函数 $f(x)=x^3+3x^2+6x+14$，且 $f(a)=1, f(b)=19$，则 $a+b=$____。。

【解析】由 $f(x)=x^3+3x^2+6x+14=(x+1)^3+3(x+1)+10$，设 $x+1=t, f(t)=t^3+t$ 为奇函数，可知 $f(x)$ 的图象关于点（-1,10）成中心对称，即有 $f(-1+x)+f(-1-x)=20$，从而有 $f(x)+f(b)=1+19=20$，又 $f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 为单调函数，所以 $a+b-2$。

【评注】本题可视为例 4 的逆向问题，依然考查函数的中心对称问题，其核心是探求三次多项式函数的对称性。解题过程中，要求有较强的代数式变形能力，这是对考生创新意识的考查。也就是，要仿照二次函数通过“配平方”求对称轴的方法，对本题三次函数通过“配立方”的方法，寻找函数的对称中心。

这里要提醒大家注意的是：若函数 $f(x)$ 对任意自变量 x 都有 $f(a-x)+f(a+x)=2b \Leftrightarrow$ 则 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称；但是若函数 $f(x)$ 图象关于点 (a,b) 对称，且 $f(m)+f(n)=2b$，则不一定有 $m+n=2a$。

【结论 1】如果一个单调函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称，且 $f(m)+f(n)=2b$，那么必有 $m+n=2a$。

同类题目练习：

（1）函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\dots+\frac{1}{x+2015}$ 图象的对称中心的坐标为____。（答案：（-1007，0））

（2）已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)+2$，则 $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})=$____。（答案：4）

DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i14.5975

（3）已知函数 $f(x)=x\ln(e^x+1)-\frac{1}{2}x^2+3$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m$=____。（答案：6）

3 命题方向二：立足方程，考查数形结合能力

鉴于函数与方程的特殊关系，方程的根就是函数的零点，就是函数图象与 x 轴交点的横坐标。若一个函数的图象具有某种对称性，那么它所对应的方程的根也就有相似的对称性。因此，考查方程根的分布问题的考题往往会涉及到函数图象的对称性。这类考题需要考生挖掘题目所给方程所对应的函数的特殊性质，侧重考查考生数形结合能力 [2]。

【例 6】方程 $(x-1)\sin\pi x=1$ 在区间（−1，3）上有四个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4$=____。

【解析】因为 $y=x-1$ 与 $y=\sin\pi x$ 交于（1,0）点，且 $y=x-1$ 与 $y=\sin\pi x$ 的图像都是关于（1,0）点成中心对称，所以函数 $f(x)=(x-1)\sin\pi x-1$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。因此函数 $f(x)=(x-1)\sin\pi x-1$ 与 x 轴的交点关于点（1,0）中心对称，即方程 $(x-1)\sin\pi x=1$ 的根“成对”出现，且每对根的和都是 2。由于区间（−1,3）关于（1,0）点中心对称，所以四个不同的实数根 x_1，x_2，x_3，x_4 分成两对，有 $x_1+x_2+x_3+x_4=4$。

【评注】本题中的方程的根显然是无法求得的只能探求根之间的特殊关系，而根的特殊性是由方程的特殊性决定的，自然引导我们考察函数 $f(x)=(x-1)\sin\pi x$ 的特殊性质。

类比函数 $g(x)=x\sin x$ 的性质：$y=x$ 与 $y=\sin x$ 都是奇函数，图像都是关于原点对称，而奇函数与奇函数的积是偶函数，因此 $g(x)=x\sin x$ 为偶函数；由此我们可以得到 $f(x)=(x-1)\sin\pi x$ 向左平移 1 个单位长度后也是偶函数，所以 $f(x)=(x-1)\sin\pi x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。

【结论 2】如果一个函数存在零点且该函数的图像关于直线 $x=a$ 或点 $(a,0)$ 对称，那么该函数的图像与 x 轴的交点也关于点 $(a,0)$ 对称。即该函数的零点会“成对”出现，且每对零点之和为 $2a$。

【例 7】已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}x^2+2, x\in[0,1)\\2-x^2, x\in[-1,0)\end{cases}$，且 $f(x+2)=f(x), g(x)=\frac{2x+5}{x+2}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 上所有实根之和为____。

【解析】当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)$ 的图像关于点 $(0,2)$ 对称，又 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图像（除去 $x=2k+1, k\in Z$ 的点）关于点 $(2k,2)$ 中心对称。而 $g(x)=\frac{2x+5}{x+2}=2+\frac{1}{x+2}$ 的图像关于点 $(-2,2)$ 中心对称，故函数 $f(x)$（除去 $x=2k+1, k\in Z$ 的点）与 $g(x)$ 的图像都关于点 $(-2,2)$ 中心对称。又 $f(-3)=g(-3)=1$，$f(-1)\neq g(-1)$，所以 $x=[-3,-1]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有且只有一个交点，即方程 $f(x)=g(x)$ 在 $x=[-3,-1]$ 上有且只有一个实根。所以方程 $f(x)=g(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 上有 3 个实数根，其中一根为 −3，另外两根关于点 $(-2,2)$ 中心对称，故所有实根之和为 −7。

【评注】考查函数零点或方程根的问题，一般不在于解方程，而更多的是倾向于考查函数的性质。借助函数的奇偶性，图像的对称性，易发现两函数图像都是关于点 $(-2,2)$ 中心对称，其中一根为 −3，点 $(-3,1)$ 是两个函数的交点，而 $(-3,1)$ 关于点 $(-2,2)$ 的对称点点 $(-1,3)$ 不是两个函数的交点，这正是本题“陷阱”所在。

同类题目练习：

（4）方程 $(x-\pi)^2+(x-\pi)\sin x=1$ 的所有解之和为_____。（答案：2π）

5. 函数 $y=\frac{4^x}{4^x+2}$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{2}\cos\pi x+\frac{1}{2}$ $(-3\le x\le -4)$ 的所有交点的横坐标之和为____。（答案：3.5）

（5）已知 $f(x)$ 是 R 上最小正周期为 2 的周期函数，且当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=x^3-x$，则函数 $f(x)$ 的图像在区间 $[0,6]$ 上与 x 轴的交点个数为____。（答案：6）

4 命题方向三：着眼综合，考查转化化归能力

【例 8】设函数 $f(x)=(x-3)^2+x-1$，数列 $\{a_n\}$ 为公差不为 0 的等差数列，且 $f(a_1)+f(a_2)\ldots+f(a_7)=14$，则 $a_1+a_2\ldots+a_7$____。

【解析】因为 $f(x)=(x-3)^2+(x-3)+2$，所以函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(3,2)$ 成中心对称，进一步有 $f(3-x)+f(3+x)=4$。$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_7)=14=2\times 7, f(3)=2$，$f(x)$ 为单调函数，数列 $\{a_n\}$ 为公差不为 0 的等差数列，所以 $a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2a_4=2\times 3$，因此 $a_1+a_2+\ldots+a_7=21$。

【例 9】已知函数 $f(x)=\sin x+\tan x$，项数为 27 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且公差 $d\neq 0$。若 $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_{27})=0$，则当 $k=$_____ 时，$f(a_k)=0$。

 DOI: https://doi.org/10.26549/jxffcxysj.v3i14.5975

【解析】$f(x)=\sin x+\tan x$ 为奇函数且单调递增，其函数图象关于原点对称，$f(0)=0$。因为 $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{27})=0$，等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且公差 $d\neq 0$，所以必有 $f(a_1)+f(a_{27})=f(a_2)+f(a_{26})=...=f(a_{14})=0$，故当 $k=$ 14 时，$f(a_k)=0$。

【评注】这类问题的典型特征是数列与函数的结合，综合考察函数的奇偶性，对考生的数学能力提出了更高的要求。

【结论 3】如果一个单调函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称，$\{a_n\}$ 为等差数列且 $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)=nb$，那么必有 $a_1+a_2+...+a_n=na$。

【例 10】设直线 l 与曲线 $y=x^3+x+1$ 交与 3 个不同的点 A,B,C，且 $|AB|=|BC|=\sqrt{5}$，则直线 l 的方程为____。

【解析】因为 $|AB|=|BC|$，所以 B 为线段 AB 的中点，而曲线 $y=x^3+x+1$ 关于点 $(0,1)$ 成中心对称，所以点 B 的坐标为 $(0,1)$。可以设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入曲线 $y=x^3+x+1$，解得 $x=\pm\sqrt{k-1}(k>1)$，因为 $|AB|=|BC|=\sqrt{5}$，所以 $\sqrt{1+k^2}\sqrt{k-1}=\sqrt{5}$，解得 $k=2$，故所求直线方程为 $y=2x+1$。

【评注】本题看似一道解析几何问题，如果按照解析几何求曲线与直线相交的弦长问题解决，那么解题将趋于繁琐，甚至步入困境。仔细观察题目，$|AB|=|BC|$ 与 $y=x^3+x+1$ 的特殊性，问题中隐含了点 B 是 AC 中点的重要信息，抓住这一关键点，问题将迎刃而解。

【例 11】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$ 的图像在点 $P(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=3x-2$。

（Ⅰ）求实数 a，b 的值。

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)+\frac{m}{x-1}$ 是上 $[2,+\infty]$ 的增函数。

（1）求实数 m 的最大值。

（2）当 m 取得最大值时，是否存在点 Q，使过点 Q 的直线若能与曲线 $y=g(x)$ 围成两个封闭图形，则这两个封闭图形的面积总相等？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由。

【解析】（Ⅰ）过程略 $a=3$，$b=-2$。

（Ⅱ）（1）$g(x)=f(x)+\frac{m}{x-1}=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-2+\frac{m}{x-1}$，$g'(x)=x^2-2x+3-\frac{m}{(x-1)^2}$

因为 $g(x)$ 是 $[2,+\infty]$ 上的增函数，所以 $g'(x)\geq 0$ 在 $[2,+\infty]$ 上恒成立，设 $t=(x-1)^2,t\in[1,+\infty)$，则 $m\leq t^2+2t$ 在 $t\in[1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $m\leq(t^2+2t)_{\min}=3$，故 m 的最大值为 3。

（2）由（1）得 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-2+\frac{m}{x-1}=\frac{1}{3}(x-1)^3+2(x-1)+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{3}$，其图像关于点 $\left(1,\frac{1}{3}\right)$ 对称，即 $f(1-x)+f(1+x)=\frac{2}{3}$，也就是说存在点 $Q\left(1,\frac{1}{3}\right)$，使过点 Q 的直线与曲线 $y=g(x)$ 围成两个封闭图形面积总相等。

【评注】看似很复杂的问题，在经过适当的变形后，根据题意，从“使过点 Q 的直线若能与曲线 $y=g(x)$ 围成两个封闭图形，则这两个封闭图形的面积总相等”概括提炼出图像的对称性问题，解题就会变得更顺畅。

同类题目练习：f

（7）设函数 $f(x)=2x-\cos x,g(x)=2x+\sin x$，数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列，若 $\sum_{i=1}^{7}f(a_i)=7\pi$，则 $\sum_{i=1}^{7}g(\frac{\pi}{2}-a_i)=$____ $\frac{\left[f(a_4)\right]^2}{a_i\cdot a_7}=$____。（答案：0，$\frac{64}{7}$）

（8）已知函数 $y=x^3+3x^2+x$ 的图像 C 上存在一点 P 满足：若过点 P 的直线 l 与曲线 C 相交于异于点 P 的两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，就恒有 y_1+y_2 为定值 y_0，则 $y_0=$____。（答案：2）

5 结语

通过以上问题不难发现，函数对称性在高考试题当中千变万化，花样层出不群，但是无论题目如何变化，函数的性质始终保持不变，以“不变应万变”，只要大家扎实掌握了函数的性质，那么解决函数问题自然就不成问题了。

参考文献

[1] 熊焕军 . 名师特攻 [M] 西安 : 西安地图出版社 ,2015.

[2] 刘绍学 . 普通高中课程标准实验教科书 [M] 北京 : 人民教育出版社 ,2009.