DOI: https://doi.org/10.26549/iptm.v4i3.6616

The Motion of the Particle in a Centered Force Field

Feifan Su[1,2] Peng Rao[3] Zihu Wang[1]

1.School of Electronic Information Engineering, Jiangxi University of Engineering, Xinyu, Jiangxi, 338099, China
2.Beijing National Research Center for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, China
3.School of Economics and Trade, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning, Guangxi, 530003, China

Abstract

The motion of particle in central force field plays an important role in physics teaching in middle school and university. In recent years, the proportion of investigation in physics competition of middle school students has also increased, the systematic discussion of this problem is helpful for physics teachers in middle school and university to understand the properties of central force field and to establish macroscopic physical images. Starting from Lagrange equation, this paper systematically discusses the motion characteristics of the particle in the central force field, gives the general forms of the angular momentum conservation, energy conservation and motion equation of the particle in the central force field, discusses in detail the properties of the particle when its trajectory is elliptic, and derives Kepler's three laws of motion.

Keywords

central force field; Lagrange equation; conservation of angular momentum;energy conservation; trajectory equation

质点在有心力场中的运动

宿非凡 [1,2] 饶鹏 [3] 王子虎 [1]

1. 江西工程学院电子信息工程学院，中国·江西 新余 338099
2. 中国科学院物理研究所北京凝聚态物理国家研究中心，中国·北京 100190
3. 广西财经学院经济与贸易学院，中国·广西 南宁 530003

摘 要

质点在有心力场中的运动在中学与大学物理教学中都占有重要地位。近年来，在中学生物理竞赛中考察的比重也有所上升，对该问题的系统讨论有助于大、中学物理教师对有心力场性质的理解和宏观物理图像的建立。论文从 Lagrange 方程出发，系统地研究讨论了质点在有心力场中的运动特征，给出了质点在有心力场中的角动量守恒、能量守恒和运动方程的一般形式并，详细地讨论了质点轨迹为椭圆时的性质并导出了 Kepler 行星运动三定律。

关键词

有心力场；Lagrange 方程；角动量守恒；能量守恒；轨迹方程

1 引言

质点在有心力场中的运动是宇宙中十分重要的一种运动形式，从天体的运动到微观粒子在电磁场中的运动都属于这种运动形式。因此，其在中学物理教学与大学物理教学中占有重要的地位，在中学生物理竞赛与自主招生考试的教学中，考试的难度和范围要求物理教师对质点在有心力场中运动的性质和特征有系统的深入了解。目前对于质点在有心力场运动的讨论多根据正则运动方程 [1]，大学物理专业教材对该问题的讨论常以能量守恒与角动量守恒为前提进行 [2,3]，而大学非物理专业普通物理教材一般不涉及这方面的讨论 [4]。

我们知道，基于最小作用量原理可以导出 Lagrange 运动方程，进而可以导出基本的力学规律 [5]，论文将 Lagrange 运动方程应用于质点在有心力场中运动的研究中得到质点在有心力场中运动的运动特征，直接导出质点运动满足角动量守恒与能量守恒的结论，而不以守恒定律为前提。因此，这种方法数学计算简单，物理意义明显、图景清晰，有益于理解该运动形式物理本质，适合大、中学物理教师参考。

【作者简介】宿非凡（1990–），男，博士，中国物理学会会员，从事超导量子计算、量子力学几何相位、超导量子比特的设计与制备、微纳加工等研究。

 DOI: https://doi.org/10.26549/iptm.v4i3.6616

2 有心力场中质点的运动方程、角动量守恒与能量守恒

对于质点在有心力场中的运动，在球坐标系中质点的 Lagrange 量可以表示为：

$$\ell=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-U(r) \tag{1}$$

其广义坐标为别为 r,θ,φ，m 为质点质量。根据 Lagrange 运动方程：

$$\frac{\partial\ell}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{q}_i}=0 \tag{2}$$

将（1）式代入上式并对广义坐标 φ 进行计算，可以得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\\[2ex]\dfrac{\partial\ell}{\partial\varphi}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=0$，可见 $\dot{\varphi}=0$ 即广义坐标 φ 不随时间变化，也就是说质点将在一个确定的平面上运动。因此，质点的 Lagrange 量可以简化为：

$$\ell=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r) \tag{3}$$

将（3）式代入 Lagrange 运动方程中并对广义坐标 θ 进行计算，可以得到：

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{\theta}}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta})=0 \tag{4}$$

由于质点的角动量可以表示为 $L=mr^2\dot{\theta}$，因此（4）式可以写为：

$$\dot{L}=0 \tag{5}$$

（5）式表明质点在有心力场中的角动量不随时间变化，即角动量守恒。

质点的能量可以表示为：

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+U(r) \tag{6}$$

对于引力场，质点在其中的势能项可以写为：$U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}$，将其代入（6）式后将质点的能量对时间求一阶导数，可以得到：

$$\dot{E}=\dot{r}(m\ddot{r}-m\ \ \dot{\theta}^2-\frac{\alpha}{r^2}) \tag{7}$$

另一方面，将（3）式代入 Lagrange 运动方程中并对广义坐标 r 进行计算，可以得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\ell}{\partial\dot{r}}=m\ddot{r}\\[2ex]\dfrac{\partial\ell}{\partial r}=m\ \ \dot{\theta}^2+\dfrac{\alpha}{r^2}\end{cases}$$

$\Rightarrow m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-\dfrac{A}{r^2}=0$，将其代入（7）式有：

$$\dot{E}=0 \tag{8}$$

（8）式表明质点在有心力场中的能量不随时间变化，即能量守恒。

至此，基于 Lagrange 运动方程直接验证了质点在有心力场中的运动满足角动量守恒与能量守恒并且证明了质点在有心力场中的运动局限于一个轨道平面上。

3 有心力场中质点的轨迹方程

要得到质点在有心力场中的轨迹方程，需要找到质点运动总能量随位置的函数关系。考虑质点的角动量 $L=mr^2\dot{\theta}$，将其代入（6）式消去 $\dot{\theta}$ 以得到能量与广义坐标 r 的函数关系：

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+U(r) \tag{9}$$

整理得出：

$$\dot{r}=\left(\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{L^2}{m^2r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

对（10）式进行积分变换：

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{2}{m}\left[E-U(r)\right]-\frac{L^2}{m^2r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L}{mr^2}$，（11）式可以写为：

$$\mathrm{d}\theta=\frac{L\mathrm{d}r}{r^2\left(2m\left[E-U(r)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}\right)}$$

即：

$$\theta=\int\frac{L\mathrm{d}r}{r^2\left(2m\left[E-U(r)\right]-\dfrac{L^2}{r^2}\right)}+C \tag{12}$$

在引力场中将 $U(r)=-\dfrac{\alpha}{r}$ 代入（12）式并积分可以得到：

$$\theta=\arccos\left[\frac{\dfrac{L}{r}-\dfrac{m\alpha}{L}}{(2mE+\dfrac{m^2\alpha^2}{L^2})^{\frac{1}{2}}}\right]+C \tag{13}$$

 DOI: https://doi.org/10.26549/iptm.v4i3.6616

选择适当的坐标原点可以使积分常数 C=0，如果令：

$$p=\frac{L^2}{m\alpha} \tag{14}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2LM^2}{m\alpha^2}} \tag{15}$$

则（13）式可以写成 $\theta=\arccos(\frac{p}{er}-\frac{1}{e})$，即：

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi \tag{16}$$

可见（16）式为焦点位于坐标原点的圆锥曲线方程，$2p$ 与 e 分别为正焦弦与偏心率。由解析几何理论可知，当离心率 e=1 时（此时 E=0）质点的轨迹为抛物线，由于此时 E=0 从物理上讲当质点从距离有心力场中心无穷远的地方由静止开始运动就会出现这种形式的运动轨迹；当离心率 e<1 时（此时 E<0）质点的轨迹为椭圆由于此时 E<0 故质点在有心引力场中就会出现这种形式的运动轨迹，当离心率 e>1 时（此时 E>0）质点的轨迹为双曲线，由于此时 E>0 故质点在有心斥力场作中就会出现这种形式的运动（例如康普顿散射）；特别的，当离心率 e=0 时质点的轨迹为圆周，取天体圆周运动中心环绕模型并将 $\alpha=GMm$（其中 G 为万有引力常数，M 为中心天体质量）代入（15）式，可以计算得到此时 $E=-\frac{GMm}{2r}$ 即我们熟悉的中心环绕问题中质点的机械能[6]。

综上所述，可以得到这样的结论：质点在有心力场中的运动轨迹为同一平面内的圆锥曲线而运动过程中质点满足角动量守恒与能量守恒。

4 质点椭圆轨迹的性质与运动周期

由于天体运动中的椭圆轨迹在中学物理竞赛和大学物理教学的各类问题中最常见到，所以这里以椭圆轨迹为例利用上面的结论进行详细讨论，对于抛物线和双曲线两种形式可以类似的加以研究，由于篇幅所限就不展开讨论。

当离心率 e<1 时，根据解析几何理论椭圆的半长轴和半短轴分别为：

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|} \tag{17}$$

$$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \tag{18}$$

由（15）、（16）、（17）式可以发现椭圆的半长轴只与质点的能量有关，而角动量只影响轨迹的正焦弦与偏心率。进一步可以得到质点与中心天体的最近距离与最远距离分别为：

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e) \tag{19}$$

$$r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e) \tag{20}$$

至此质点椭圆轨迹的参数已经完备的算出，可以确定如图 1 的椭圆轨迹（坐标原点为力心）。

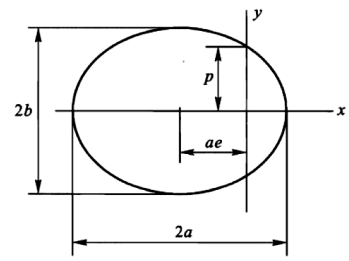

图 1 质点在有心力场中椭圆轨迹的相关参数示意图

由于在圆锥曲线中椭圆是封闭曲线，质点在沿椭圆轨道运动时有周期。在质点运动的过程中取一个小角位移 $\mathrm{d}\theta$，则对应质点与天体中心连线在该过程中扫过的小面积为 $\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$，对该式左右同时求对时间的一阶导数，可以得到略面速度 $\dot{S}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$，再考虑质点角动量的表达式 $L=mr^2\dot{\theta}$，可以得到：

$$L=2m\dot{S} \tag{21}$$

即：

$$\mathrm{d}t=\frac{2m}{L}\mathrm{d}S \tag{22}$$

可由积分：

$$\int_0^T \mathrm{d}t=\int_0^{S_{椭圆}}\frac{2m}{L}\mathrm{d}S \tag{23}$$

计算上述积分并考虑椭圆面积公式得到质点椭圆运动的周期：

$$T=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{24}$$

在天体圆周运动中心环绕模型并取 $\alpha=GMm$，$E=-\frac{GMm}{2r}$时，（23）式给出$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$，这也是我们熟悉的天体圆周运动中心环绕模型的运动周期[6]。应该注意到，除椭圆轨道之外的其他圆锥曲线轨道，如果可以计算相应的面积也可以由（22）式计算质点运动的时间。

结合论文的讨论不难发现，有心力场中质点的椭圆轨迹可以完备的确定，也就是得到了 Kepler 第一定律；将（21）式与（5）式联立，可以得到 $\ddot{S}=0$即有心力场中质点的略面

速度守恒，也就是 Kepler 第二定律；由于椭圆轨道的半长轴 a 只与质点能量有关，将（17）式 $\alpha = GMm$ 与代入（24）式稍加整理便得到 $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$，也就是 Kepler 第三定律。

5 结语

至此，将 Lagrange 运动方程应用于质点在有心力场中运动的研究中，得到了质点在有心力场中的运动轨迹为同一平面内的圆锥曲线而运动过程中质点满足角动量守恒与能量守恒的结论并给出了质点轨迹为椭圆时轨迹的完备特征参数。推导过程数学计算简单，物理意义明显，物理图像清晰，有助于高中物理教师在高中物理教学与高中物理竞赛教学中对质点在有心力场中的运动特性的理解和宏观把握，也有助于大学普通物理教师开阔教学思路。

参考文献

[1] 陆世专 , 游开明 , 汪新文 , 等 . 有心力场中质点轨道方程求解问题的讨论 [J]. 衡阳师范学院学报 ,2014(03):32-35.

[2] 赵凯华 . 新概念物理教程——力学 [M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2008.

[3] 舒幼生 . 力学 (物理类)[M]. 北京 : 北京大学出版社 ,2005.

[4] 程守洙 , 江之永 . 普通物理学 (上册)[M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2017.

[5] 宿非凡 . 基于最小作用量原理对经典力学规律的导出 [J]. 物理通报 ,2019(12):122-128.

[6] 程稼夫 , 崔鸿宾 , 江四喜 . 中学奥林匹克竞赛物理教程——力学篇 [M]. 合肥 : 中国科学技术大学出版社 ,2018.