

Some Thoughts on the Teaching Content of Differential Geometry

Hongbing Qiu

School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan, Hubei, 430072, China

Abstract

This paper analyzes the methods to stimulate students' interest in learning, and expounds the teaching strategies of differential geometry from the perspective of curve theory and surface theory, so as to improve the teaching quality of differential geometry.

Keywords

Differential geometry; content of courses; geometric intuition

关于微分几何教学内容的一点思考

邱红兵

武汉大学数学与统计学院, 中国·湖北 武汉 430072

摘要

论文分析了激发学生学习兴趣的方法, 从曲线论与曲面论两个角度, 阐述了微分几何的教学策略, 以提高微分几何课程的教学质量。

关键词

微分几何; 教学内容; 几何直观

1 引言

随着微分几何学的蓬勃发展和国家对基础学科的高度重视, 以及它在物理、工程、测量与计算机辅助设计等领域的应用越来越广泛, 很多学校不仅要求数学专业的本科生将微分几何作为必修课, 而且也要求相关非数学专业的本科生学习微分几何课程。论文主要就教师如何给非数学专业的本科生讲授微分几何, 谈谈笔者自己的一点浅薄看法。

2 如何激发学生的学习兴趣

如何让非数学专业的本科生容易理解和接受微分几何的内容和知识点, 这是对讲授微分几何课程的教师一个不小的考验。要让学生听起来浅显易懂, 不觉得突兀, 才能激起学

生的学习兴趣和求知欲。学生初学微分几何遇到一些新的记号和抽象的理论时, 容易产生畏难的情绪, 作为授课教师, 就显得尤为重要, 不宜照搬给数学专业的本科生上课的讲授内容, 一定要通过合理的教学设计, 做到因材施教。

2.1 介绍微分几何的主要内容

可以结合学生的专业, 对微分几何做些简单的介绍, 使学生初步了解这门课的主要内容, 学习目的和方法。当学生对课程有了一个初步的了解和把握后, 才有可能激起他们的学习兴趣和主观能动性。

2.2 讲授微分几何的应用实例

可以讲讲微分几何的一些应用, 在理论物理方面, 现在大家熟知的爱因斯坦建立的广义相对论正是用到微分几何的理论; 在机械工程方面, 共轭曲面在齿轮啮合中的应用以及单参数曲面的包络面在构造加工曲面中的应用等; 在金融工程方面, 有几何套利理论-无套利分析; 在机器学习、图像处理、3D打印、人脸识别等领域也都有广泛的应用。数学本来就是枯燥的, 把数学学好是件辛苦的事, 当学生们了解到学微分

【基金项目】国家自然科学基金面上项目《子流形的几何及相关问题研究》(项目编号: 11771339)。

【作者简介】邱红兵(1981-), 男, 博士, 副教授, 从事微分几何的研究。

几何能在实际中派上用场,他们才会更有动力去更用心更认真地学。

3 曲线论的教学

微分几何主要讲三维欧氏空间中的曲线和曲面的几何,其实最初几何的观念来源于人们对于自然空间的直观感受和经历,如何把几何直观和数量关系式建立桥梁,是很重要的技术手段,这一点和我们讲授高等数学中的向量代数与空间解析几何那一章节有些类似。例如,当两个向量方向相同或相反时,称这两个向量是平行的;如果三个及三个以上的向量经过平移可移到同一平面上,则称这些向量是共面的。

在平行和共面的定义中,是通过几何直观来描述向量间的位置关系,那在数学上如何去实现对它们的几何刻画呢?很重要的就是要建立空间直角坐标系,在此基础上,得到向量的坐标表示,然后通过数量等式对平行和共面分别进行精确的刻画。

简单讲,微分几何其实就是用微积分的知识来解决几何问题,所以讲到曲线论时相应的要先建立 Frenet 标架(相当于建立了坐标系),在此基础上计算一些几何量。例如,曲率、挠率等。其实当讲到曲线的曲率时,也可以先复习高等数学中关于曲率的内容,给学生做一下铺垫,然后推进到微分几何中是如何引出曲率的概念,相应的几何意义及其与高斯映射的关系,同时多举一些常见的例子(如直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线、螺旋线、双扭线等),计算这些例子的曲率及高斯映射,这样由浅入深,层层递进,可以让学生体会到数学既严谨又有趣,当学生感到学微分几何其实很好玩的时候,他们的学习兴趣自然会得到提升,学生也就乐意主动去学,从而有学好微分几何的主观意愿。

所以在开始讲微分几何的时候,可以简要回顾高等数学关于向量代数和曲率等章节的相关内容,这样可以让学生把前后知识点串起来,形成一个整体,学生也更容易理解和接受乃至印象深刻,他们再学起来也会事半功倍。

4 曲面论的教学

讲到曲面论时,很重要的内容就是曲面论的基本定理,即存在唯一性定理。其中唯一性讲的是如果两个有着相同参数域的曲面在参数域中的任意点下都有相同的第一基本形式

和第二基本形式,则这两个曲面相差一个欧氏空间的刚体运动。这里是指在相差欧氏空间的刚体运动的意义下是唯一的,因为在欧氏空间中,曲面是可以经过平移、旋转或镜面反射得到新的曲面,而刚体运动是指平移、旋转、镜面反射以及它们的复合,那么相差欧氏空间的刚体运动的意义下是唯一的是指曲面和它经过平移、旋转或镜面反射得到新的曲面视为同一曲面。

曲面的存在性定理讲的是如果两个函数满足高斯方程和 Codazzi 方程,则在任意点处,存在定义在该点局部邻域的曲面,使得由前述两个函数得到的两个二次微分形式分别是该曲面的第一基本形式和第二基本形式。关于存在性方面的结果,在高等数学中讲零点定理、介值定理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及积分中值定理时,就已经涉及到,对学生来讲不是陌生的。存在性和唯一性更是常微分方程和偏微分方程中的核心内容。

本质上讲,曲面的自然标架的运动方程是一个一阶线性偏微分方程组,而高斯方程和 Codazzi 方程是这个偏微分方程组的可积性条件。这样曲面论的存在性就可以看作是一阶线性偏微分方程组求解的简单应用,于是曲面论的存在性定理也就不难理解。同时,学生通过这个定理,结合以前学过的不同课程,可以把自己所学到的知识融会贯通。另外,由于讲授微分几何的时候会举很多曲线和曲面的例子,这些图形可以通过多媒体呈现给学生,在课堂上能起到相当不错的教学效果。

5 结语

通过微分几何的教学可以提高学生解决复杂问题的综合能力和素养,教育方法和教学效果的提高,是一个宏大的课题,需要进行长时间的积累和总结。

参考文献

- [1] 苏步青.初等微分几何[M].上海:上海科学技术出版社,1985.
- [2] 彭家贵.微分几何[M].北京:高等教育出版社,2002.
- [3] 梅向明.微分几何[M].第3版.北京:高等教育出版社,2003.
- [4] Manfredo P.do Carmo 曲线与曲面的微分几何[M].北京:中国机械工业出版社,2004.