

Discussion on Optimization Strategy of Planar Vector and Analytic Geometry

Weixin Zhou

Gansu Water Conservancy and Hydropower School, Lanzhou, Gansu, 730021, China

Abstract

Taking the tool to solve the analytical geometry problem and how to optimize the analytical geometry and plane vector is not only the direction of the reform of college entrance examination, but also the obstacle for most students in the mathematics of college entrance examination, this paper studies it in the form of example questions.

Keywords

plane vector; analytic geometry; optimization strategy

例谈平面向量与解析几何交汇问题的优化策略

周维新

甘肃省水利水电学校, 中国·甘肃 兰州 730021

摘要

以平面向量作为工具解决解析几何问题, 如何优化解析几何与平面向量交汇融合问题, 既是高考命题改革的方向, 又是大部分学生在高考数学中的“拦路虎”, 论文以例题的形式加以研究。

关键词

平面向量; 解析几何; 优化策略

1 引言

解析几何是高中数学中的重要内容之一, 也是高考考查的重要内容, 高考对这部分的内容考查常以选填题或解答题的形式出现, 也常与平面向量交汇, 题型较稳定, 属中高档题。把平面向量作为工具应用于平面解析几何当中, 可以起到事半功倍的效果。我们在备考复习中要解决此类问题, 就需要经常训练学生学会用平面向量搭建一个桥梁建立代数与几何的联系, 从而巧妙解决平面向量与解析几何的交汇问题, 使问题简单化, 从而顺利、快捷、准确地解决问题, 避开一些烦琐的运算, 同样能使问题简单化。

解析几何与平面向量交汇融合是高考命题改革的主旋律, 尤其是在解决解析几何问题时融合平面向量的知识、渗透平面向量的思想方法, 而学生对此普遍感到不适应, 论文

通过例题的方式对平面向量与解析几何交汇综合问题的优化策略进行探讨^[1]。

2 优化解题思路, 减少运算量

“减少运算量, 提高思维量”是近年来高考数学命题的一个方向, 在高考数学命题中对求轨迹的方程一般倾向于采用适当的转化, 然后用定义法, 优化解题思路, 减少运算量。

例1: 已知 $\vec{i}, \vec{j}$ 是x轴和y轴正方向的单位向量, 设 $\vec{a} = (x + \sqrt{3})\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{b} = (x - \sqrt{3})\vec{i} + y\vec{j}$, $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 4$ 。

① 求点M(x,y)的轨迹C的方程。

② 若过点Q(0, m)且方向向量为 $\vec{c} = (1, 1)$ 的直线 ℓ 与点M的轨迹交于A, B两点, 求当m为何值时 ΔAOB 的面积最大值, 并求出最大值。

解: ① $\because \vec{a} = (x + \sqrt{3})\vec{i} + y\vec{j}$, $|\vec{b}| = (x - \sqrt{3})\vec{i} + y\vec{j}$, 且 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 4$ 。

$\therefore$ 点M(x,y)到点 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ 的距离之和为4,

【作者简介】周维新(1964 -), 男, 中国甘肃天水人, 本科, 高级讲师, 从事数学教学及青少年心理健康领域研究。

故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

② 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题意, 直线 AB 的方程为 $y=x+m$, 将其代入椭圆方程, 得到 $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$ 。

由韦达定理得: $x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}m, x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{5}(m^2 - 1)$ 。

因此, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}|AB|d = \frac{2}{5}\sqrt{(5-m^2)m^2}$ 。

当 $5-m^2 = m^2$ 时, 即 $m = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时, $S_{\max} = 1$ 。

3 巧用圆锥曲线的定义, 化难为易

将圆锥曲线的定义用向量的形式呈现, 如向量的模及数量积 (内积) 的几何意义以及射影定理来表示, 这为平面向量与解析几何交汇题型开拓了广阔的空间^[2]。

例 2: 已知两点 $P(-2, 0), Q(2, 0)$, 动点 M 在 y 轴上的射影是 H, 如果 $\vec{MH} \cdot \vec{MH}, \vec{MP} \cdot \vec{MQ}$ 分别是公比为 2 的等比数列的第三项和第四项。

① 求动点 M 的轨迹 C 的方程;

② 已知过点 Q 的直线 l 交曲线 C 于 x 轴的下方 A, B 两个不同的点, 设 R 为 AB 的中点, 过点 R 与定点 $N(0, -2)$ 的直线交 x 轴上一点 $D(x_0, 0)$, 求 x_0 的取值范围。

解 ① 设 $M(x, y), H(0, y)$

则 $\vec{MP} = (-2-x, -y), \vec{MQ} = (2-x, -y)$

所以, $\vec{MH} \cdot \vec{MH} = x^2, \vec{MP} \cdot \vec{MQ} = (2-x)(-2-x) + y^2 = x^2 + y^2 - 4$ 。

又因为 $\frac{\vec{MP} \cdot \vec{MQ}}{\vec{MH} \cdot \vec{MH}} = 2$, 代入得: $\frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2} = 2$ 。

化简即得点 M 的轨迹方程为: $y^2 - x^2 = 4 (x \neq 0)$ 。

② 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), R(x_3, y_3)$. 直线 AB 方程: $y=k(x-2)$,

由 $\begin{cases} y = k(x-2) \\ y^2 - x^2 = 4 \end{cases}$ 化简得 $(k^2-1)x^2 - 4k^2x - 4(k^2-1) = 0$ 。

这样即得 $\begin{cases} x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2k^2}{k^2-1} \\ y_3 = \frac{2k}{k^2-1} \end{cases}$

从而推出 $\frac{y_3}{x_3} = \frac{1}{k}$ 。

所以 DN 的方程为 $\frac{y+2}{x} = \frac{y_3+2}{x_3}$,

令 $y=0$, $\frac{2}{x_0} = \frac{y_3+2}{x_3} = \frac{1}{k} + \frac{2}{x_3}$,

解得: $x_0 = \frac{2}{\frac{1}{k} + 2 \cdot \frac{k^2-1}{2k^2}} = \frac{2}{-(\frac{1}{k} - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}}$ 又由

$$\begin{cases} \Delta = 16k^4 - 16(k^2-1)^2 = 32k^2 - 16 > 0, \\ y_1 + y_2 < 0, \\ y_3 \cdot y_2 > 0. \end{cases}$$

化简得 $k^2 > \frac{1}{2}$, 又由题意知 $\frac{\sqrt{2}}{2} < k < 1$,

所以 $1 < \frac{1}{k} < \sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1 < -(\frac{1}{k} - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} < 1$, 所以 $2 < x_0 < 2+2\sqrt{2}$ 。

故所求的 x_0 的取值范围为 $(2, 2+2\sqrt{2})$ 。

4 综合运用向量运算, 巧解圆锥曲线问题

例 3: 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的两个焦点, 过点 F_1 的直线交椭圆于 B、C 两点。

① $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$, 求点 M 的轨迹方程。

② 若相应于焦点 F 的准线 l 与 x 轴相交于点 A, $|OF|=2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点。设

$\vec{AP} = \lambda \vec{AQ} (\lambda > 1)$, 过 P 点平行于准线 l 的直线交椭圆于另一点 M, 证明: $\vec{FM} = -\lambda \vec{FQ}$ 。

解: ① 设 $M(x, y), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 直线 BC 方程为

$y=k(x+2)$

联立方程组 $\begin{cases} y = k(x+2) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0$

由 $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$, 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6k^2}{1+3k^2}$

所以 $\begin{cases} x = \frac{-6k^2}{1+3k^2} \\ y = \frac{2k}{1+3k^2} \end{cases}$ 消去 k, 得到: $(x-1)^2 + 3y^2 = 1$

因此, M 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + 3y^2 = 1$

② 证明: $\vec{AP} = (x_1-3, y_1), \vec{AQ} = (x_2-3, y_2)$ 。

由已知得到方程组 $\begin{cases} x_1 - 3 = \lambda(x_2 - 3) \\ y_1 = \lambda y_2, \\ \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1. \end{cases}$

又因为 $\lambda > 1$, 解之得 $x_2 = \frac{5\lambda-1}{2\lambda}$

$$\text{显然 } F(2,0), M(x_1, -y_1), \vec{FM} = (x_1 - 2, -y_1) \\ = \left(\frac{1-\lambda}{2}, -y_1\right) = -\lambda\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}, y_2\right)$$

$$\text{而 } \vec{FQ} = (x_2 - 2, y_2) = \left(\frac{\lambda-1}{2\lambda}, y_2\right), \text{ 所以 } \vec{FM} = -\lambda\vec{FQ}.$$

例4: 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为

$$\sqrt{3}, \text{ 准线方程为 } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

①求双曲线C的方程;

②设直线 ℓ 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上动点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 y_0 \neq 0$) 处的切线 ℓ 与双曲线交于不同的两点A,B, 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值

$$\text{解: ①由题意, 得 } \begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{1}{3} \\ \frac{c}{a} = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 } a=1, c=\sqrt{3},$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 2,$$

$$\therefore \text{所求双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

②点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 y_0 \neq 0$) 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上,

圆在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 化简得 $x_0 x + y_0 y = 2$.

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x_0 x + y_0 y = 2 \end{cases} \text{ 及 } x^2 + y^2 = 2 \text{ 得}$$

$$(3x^2 - 4)x^2 - 4x_0 x + 8 - 2x_0^2 = 0,$$

$\therefore$ 切线 ℓ 与双曲线C交于不同的两点A、B, 且 $0 < x_0^2 < 2$,

$$\therefore 3x_0^2 - 4 \neq 0, \text{ 且 } \Delta = 16x_0^2 - 4(3x_0^2 - 4)(8 - 2x_0^2) > 0,$$

设A、B两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4x_0}{3x_0^2 - 4}, x_1 x_2 = \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4},$$

$$\therefore \cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}, \text{ 且}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{1}{y_0^2} (2 - x_0 x_1)(2 - x_0 x_2),$$

$$= x_1 x_2 + \frac{1}{2 - x_0^2} \left[4 - 2x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 x_1 x_2 \right]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{1}{2 - x_0^2} \left[4 - \frac{8x_0^2}{3x_0^2 - 4} + \frac{x_0^2(8 - 2x_0^2)}{3x_0^2 - 4} \right]$$

$$= \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} - \frac{8 - 2x_0^2}{3x_0^2 - 4} = 0.$$

$\therefore \angle AOB$ 的大小为 90° .

例5 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点P为其上的动点, 当 $\angle F_1 P F_2$ 为钝角时, 点P横坐标的取值范围是_____。

解: $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$, 设 $P(3\cos\theta, 2\sin\theta)$

$\therefore \angle F_1 P F_2$ 为钝角

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{5} - 3\cos\theta, -2\sin\theta) \cdot (\sqrt{5} - 3\cos\theta, -2\sin\theta) \\ = 9\cos^2\theta - 5 + 4\sin^2\theta = 5\cos^2\theta - 1 < 0$$

$$\text{解得: } -\frac{\sqrt{5}}{5} < \cos\theta < \frac{\sqrt{5}}{5} \therefore \text{点P横坐标的取值范围是} \\ \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

5 点评

在圆锥曲线中遇到与角有关的一类问题时, 可以将其转化为数量积, 从数量积入手, 从而起到事半功倍的效果^[1]. 本题中条件给出了钝角, 我们把它巧妙的转化成向量的数量积为负值, 再通过坐标运算列出关系式, 简洁明了。

因为向量本身具有几何和代数的“双重身份”, 它是联系向量与解析几何的“最强纽带”, 在高考数学命题中往往会突出对向量与解析几何交汇处的考查, 所以在平面解析几何这部分内容的教学中, 应抓住时机, 巧妙地渗透向量的有关知识, 以优化解题思路。

6 结语

论文通过“例谈”的形式阐述了平面向量与解析几何交汇知识的解决方法和技巧, 事实上平面向量它具有一套优良运算通性的数学体系, 它以坐标为“数”的运算去处理“形”的问题, 形成了代数与几何巧妙结合, 在当今高考命题“注重知识的内在联系和知识的综合, 在知识网络的交汇处设计问题”思想的指导下, 向量知识的考查将日趋综合化, 这一点应当引起我们的足够重视。

参考文献

- [1] 郭民, 史宁中. 中英两国高中数学教材函数部分课程难度的比较研究[J]. 外国中小学教育, 2013(7):7-8.
- [2] 王奋平. 中英高中数学教材比较研究——以英国AQA考试委员会与北师大版高中数学教材平面向量为例[J]. 数学教育学报, 2011(6): 142-143.
- [3] 晁冉冉, 傅海伦. 基于数学命题学习理论下的排列教学设计[J]. 中学数学杂志, 2016(7):27+31.