

The Mountains and Rivers are Heavy, and There is No Way Out — Exploring Concept Teaching from the Perspective of Mathematical History

Yu Gu

Shaoxing Yuanpei Middle School, Shaoxing, Zhejiang, 312000, China

Abstract

Taking the teaching design of the concept of “binary linear equations” as an example, this paper shows the function and significance of the history of mathematics in teaching, and probes into the connotation and methods of the application of the history of mathematics

Keywords

visual angle; history of mathematics; binary linear equations

山重水复疑无路，柳暗花明又一村——从数学史的角度探索概念教学

谷雨

绍兴市元培中学，中国·浙江 绍兴 312000

摘要

论文以“二元一次方程组”概念教学的设计为例，展示了数学史在教学中的作用和意义，并探讨了数学史运用的内涵及其方法。

关键词

视角；数学史；二元一次方程组

1 引言

“数学史的教育价值很多，但其核心价值在于培养学生的创新能力和创造能力”^[1]。论文以《二元一次方程组》的概念教学为例，重在挖掘历史文化背景，将数学史的内容融入日常的课堂教学，使数学课堂教学变得富有趣味和探索意义，使得学生的创新能力和创造能力得到提升。

2 历史背景的发掘

数学教学应了解数学发展的学科历史，理解数学的源和流，懂得其来龙去脉及数学的真正价值。中国是研究一次方程组最早的国家之一，“方程”一词的出现比欧洲至少早

1500 多年。二元一次方程组这个课题更是有着丰富的历史背景和文化内涵，在古代中国的众多数学文献中都能看到二元一次方程组问题。数学史上的线性方程组问题具有两个特征：一是源于实际（如土地丈量、商品交易等）；二是富有趣味性^[2]。目前的初中教材第一个特征体现得较为明显，为此在教学设计中应该挖掘数学史上趣味性较强的趣题，如二元一次方程组的概念教学就可以设计“鸡兔同笼”和“僧分馒头”等趣题。

鸡兔同笼，是中国古代著名趣题之一。大约在 1500 年前，《孙子算经》中就记载了这个有趣的问题。书中是这样叙述的：“今有雉（鸡）兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

中国明代数学家程大位写了一本《算法统宗》，里面有这样一道“僧分馒头”的题：一百馒头一百僧，大和三个更无争，小和三人分一个，大和小和得几丁？

【作者简介】谷雨（1980—），女，中国浙江绍兴人，本科，中学一级教师，就职于浙江省绍兴市元培中学，从事教育教学研究。

3 教学内涵的呈现

二元一次方程组以其简约的形式,丰富、多样的内涵存在着,中国有许多关于方程组的数学著作,在民间也流传着许多关于方程组的诗歌算题。在教学中可以借鉴中国古代数学家在研究方程组问题时的精华,将数学史内容的“史学形态”转化成适用于教学的“教育形态”,发挥课堂的最大功效^[3]。

3.1 体验数学思维

作为学生学习的重要资源,课程承担了向学生传递数学文化知识的重要职责,展现了中国古人在一次方程组研究方面的成果。

在二元一次方程组的概念教学中引用经典问题,展现了二元一次方程组的生动文化背景,使学生了解它的产生和发展。法国数学家亨利·庞加莱曾说:“如果我们想要预知数学的未来,最适合的途径是研究这门科学的历史和现状。”因此,在数学教学中,要把一些重要的数学史料介绍给学生,使学生了解数学发展的基本规律和基本思想,感受数学发展的曲折,调动学生学习数学的积极性和创造性,使学生在获得真知的同时获得顽强学习的勇气,进而塑造完美的人格。这也能让学生感觉到他正在探索一个曾经被大数学家探索过的问题,从学习中获得成功的享受,最大限度地调动学生的积极性。

3.2 揭示数学逻辑

从历史上看,二元一次方程组问题与一元一次方程问题出现得一样早。对于二元问题,我们既可以选择一个量作为未知量,也可以选择两个量作为未知量,前一种情形我们得到一元一次方程,后一种情形则得到二元一次方程组。浙教版的教材在七年级上册就出现了一元一次方程,所以对这块内容学生是熟悉的,教学中就利用二元一次方程组问题与一元一次方程问题之间的联系,由一元一次方程问题来引入二元一次方程组。

4 教学过程的展示

4.1 “鸡兔同笼”——创设情景

师(多媒体演示):

①今有雉(鸡)兔同笼,上有三十五头,下有九十四足,问雉兔各几何?

②一百馒头一百僧,大僧每人分三个,小僧三人分一个,则大小和尚各几个?

③九百九十九文钱,甜果苦果买一千,甜果九个十一文,苦果七个四文钱,试问甜苦果几个?又问各该几个钱?

观察上面的几个问题,进行思考,我们选择的未知量是什么?另一个量又是什么?该如何表示?

生1:①中,我们可以假设鸡的只数为 X ,则兔子的只数为 $(35-X)$,它们的关系是:

$$2X+4(35-X)=94$$

师:很好。

生2:②中,设大和尚的个数为 X ,小和尚的个数为 $(100-X)$,于是得到:

$$3X+\frac{100-X}{3}=100$$

生3:③中,可以假设甜果的个数为 X ,则苦果的个数为 $(1000-X)$,它们满足:

$$\frac{1}{9}X+\frac{4}{7}(1000-X)=999$$

师:都不错。

设计说明:学生是学习的主体,在课堂上引用数学史中的经典例子,不仅可以给出确定的知识,还可以给出知识的创造过程,形成探索与研究的课堂气氛,使学生的主体地位得到突现。以上提到的3个引例源自中国古代的著名趣题。先通过回顾,整合学生已有的知识储备(一元一次方程的相关知识),再探索新知(从文字中抽象出两个量之间的关系),从而掌握新知(用两个二元一次方程表示两个量的关系)。

4.2 承上启下——探究新知

师:上面的几个问题各涉及到两个量,我们设了其中一个为 X ……

生:可以设另一个为 Y ,用两个未知量。

师:想法不错,具体如何表示?

生4:我们可假设①中鸡的只数为 X ,兔子的只数为 Y ,那么 X 与 Y 之间有两个关系式,即 $X+Y=35$, $2X+4Y=94$ 。

师:对,那②和③呢?

生5:在②中设大和尚的个数 X ,小和尚的个数 Y ,就有 $X+Y=100$, $3X+\frac{Y}{3}=100$ 。

生6:甜果的个数 X ,苦果的个数 Y ,得到 $X+Y=1000$,

$$\frac{1}{9}X + \frac{4}{7}Y = 999.$$

师：嗯。然后我们观察上面每一题中的两个等式，每个等式的未知数个数是几？

生：两个。

师：相同字母所代表的量是否相同？

生：都相同。

师：两个方程中的 X、Y 都分别表示同一个未知量，也就是说 X、Y 的值必须同时满足这两个方程，因此我们可以

把两个方程联列起来，写成 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x+y=100 \\ 3x+\frac{y}{3}=100 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x+y=1000 \\ \frac{1}{9}x+\frac{4}{7}y=999 \end{cases}$ 的形式，这就是我们今天要学习的二元一次

方程组。

概括：像 $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$ 这样由两个一次方程组成，并且

含有两个未知数的方程组，叫做二元一次方程组。值得注意的是，方程组的各方程中，同一字母必须代表同一数量，这样才能合在一起。

设计说明：数学概念是构成数学知识的细胞，是进行逻辑思维的第一要素，是“双基”（即基础知识和基本技能）教学的核心内容。二元一次方程组概念的设计主要体现概念的实际背景及其形成过程之间的联系，力求将概念的形成和实际问题的解决融为一体，在了解、经历数学史的过程中掌握新知识。

4.3 例题解析——提升能力

师：阅读下列问题，设未知数，列出二元一次方程组。

①若干人共同出钱购物，若每人出 8 元，则多了 3 元；若每人出 7 元，则又少了 4 元。问：共有几个人？物价是多少？（《九章算术》）。

②甲、乙二人各有钱若干。甲若得到乙的 $\frac{1}{2}$ ，则有 50；乙若得到甲的 $\frac{2}{3}$ ，则也有 50 元。问：甲、乙各有多少钱？（《九章算术》）。

设计说明：本例中的两个问题，①是历史上第二类很重要的二元问题“盈不足”问题，②是第四类二元问题，源于古希腊。设计本例一方面使学生体会中国古代数学资源的丰富，使教学变得富有趣味和探索意义，另一方面使学生感觉

到他正在探索曾经被大数学家探索过的问题，进一步获得学习的动力，建立良好的情感体验。

4.4 合作交流——探究新知

①已知方程 $y=8x-3$ ，填写下表：

X	...	5	6	7	8	9	10	11	...
Y	...	37	45	53	61	69	77	85	...

②已知方程 $y=7x+4$ ，填写下表：

X	...	5	6	7	8	9	10	11	...
Y	...	39	46	53	60	67	74	81	...

想一想，有没有这样的解，它既是方程 $y=8x-3$ 的一个解，又是方程 $y=7x+4$ 的一个解？

引入二元一次方程组解的概念，像 $\begin{cases} x=7 \\ y=53 \end{cases}$ 一样，使二元一次方程组的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程组的解。

设计说明：学生要牢固地掌握数学，就需要用体验的方式来学习数学。这一部分借助表格进行分析，在上一节课的基础（二元一次方程组有无数组解）上进行探究，找到两个方程的共同的解，经历数学体验。

巩固提高：列出二元一次方程组，并用列表尝试的方法得出方程组的解。

① 13 世纪意大利数学家斐波纳契在《计算之书》第 12 章中设题：“将 11 分成两部分，使其中一部分的 9 倍等于另一部分的 10 倍。”

解：设 11 的一部分为 x ，另一部分为 y ，根据题意得 $\begin{cases} x+y=11 \\ 9x=10y \end{cases}$ 。

② 15 世纪法国数学家休凯在《算术三部》中设题：“木匠工作一天，获酬 5.5 元；怠工一天，赔偿 6.6 元。30 天后，木匠收支刚好相等。问：木匠工作了几天？”

解：木匠工作了 x 天，怠工了 y 天，根据题意得 $\begin{cases} x+y=30 \\ 5.5x=6.6y \end{cases}$ 。

③《希腊选集》中设题：甲对乙说：“如果你给我 10 迈纳（古希腊货币单位），那么我的钱将是你的 3 倍。”乙对甲说：“如果我从你那儿拿同样多的钱，那么我的钱将是你的 5 倍。”问甲、乙各有多少钱。

设计说明：此组练习题选自国际上的部分数学史研究文献，一方面使学生体会二元一次方程组知识的形成过程，练

习巩固用列表法得到方程组的解,为下一节课做必要的铺垫,另一方面向学生展示国际上的数学史研究文献对二元一次方程组的研究,使其充分领略数学的博大精深和数学文化的丰富多彩。

5 结语

数学史的教学运用的意义是不言而喻的。在设计二元一次方程组概念教学的过程中,秉承以学生为本的理念,运用多种形式把数学史的内容隐性地融入教学,既使数学课堂变得富有趣味,又让学生了解了数学知识形成与应用的过程。由此,教师在课程设计时不妨改变单一的形式,尝试从不同

的视角创设不同的课堂,为课堂增添新的亮彩。

参考文献

- [1] 黄翔,李开慧.关于数学课程的情境化设计[J].课程教材教法,2006(9):39-43.
- [2] 汪晓勤.HPM视角下二元一次方程组概念的教学设计[J].中学数学教学参考,2007(5):48-51.
- [3] 杨佩琼,王一杰.Do it,use it——将数学史隐性融入勾股定理教学的尝试[J].中学数学教学参考,2007,(7):53-55.