Positive Integer Solutions of Inequalities Related to Euler Functions

Qing Chang Li Gao* Jiang Ma

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an, Shaanxi, 716000, China

Abstract

Euler function is a very important and useful function in number theory. Many number theorists have studied the Euler function from different aspects, especially for the indefinite equation of Euler function, a lot of research results have been obtained. However, there are few research results on the inequalities set composed of Euler functions. In this paper, based on the previous work, using the knowledge of plane analytic geometry and combining with the method of elementary number theory, we study the solvable problems of two kinds of inequalities (groups) related to Euler functions, and give all their positive integer solutions. In this paper, φ(a) represents Euler function.

Keywords

elementary method; Euler function; inequality group; positive integer solutions

与欧拉函数有关的不等式（组）的正整数解

常青 高丽* 马江

延安大学数学与计算机科学学院，中国·陕西 延安 716000

摘 要

欧拉函数是数论中一个十分重要且有用的函数，已经有许多数论爱好者从不同方面对欧拉函数进行了研究，特别是对于有关欧拉函数的不定方程得到了大量研究成果。但是对于由欧拉函数构成的不等式组，其研究成果还不多见。论文在研究前人工作的基础上，利用平面解析几何知识，并与初等数论方法相结合，研究了两类有关欧拉函数的不等式（组）的可解性问题，并给出了它们的全部正整数解，论文中 $\varphi(a)$ 表示欧拉函数。

关键词

初等方法；欧拉函数；不等式组；正整数解

1 引言

有关欧拉函数方程和不等式整数解的研究是数论研究的重要课题之一。对任意的正整数 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 定义为序列 1，2，……，n 中与 n 互素的整数个数，它是数论研究中的一个重要函数，有着广泛的应用。关于包含欧拉函数 $\varphi(n)$ 方程整数解的研究，已经有很多丰富的成果 [1-4]。受这些文献的启发，论文在阅读相关数论书籍 [5-8] 的基础上，利用初等方法给出了上述不等式组的全部正整数解。

2 引理

引理 1[9]：设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}\in Z^+$，其中 p_i $(i=1,2,\cdots\cdots,r)$ 为互不相同的素数，则：

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\dots p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)$$

引理 2[9]：当 $n\geq 3$ 为整数时，$\varphi(n)$ 为偶数。

引理 3[10]：①方程 $\varphi(x)=1$ 的解为 $x=1$，2；②方程 $\varphi(x)=2$ 的解为 $x=3$，4，6；③方程 $\varphi(x)=4$ 的解为 $x=5$，8，10，12；④方程 $\varphi(x)=6$ 的解为 $x=7$，9，14，18；⑤方程 $\varphi(x)=8$ 的解为 $x=15$，16，20，24，30。

3 定理

3.1 定理 1

满足不等式组

【基金项目】国家自然科学基金资助项目（项目编号：11471007）；陕西省科技厅科学技术研究发展计划资助项目（项目编号：2013JQ1019）；延安大学校级科研计划资助项目（项目编号：YD2014-05）。

【作者简介】常青（1996-），女，中国陕西米脂人，硕士在读，从事数论研究。

【通讯作者】高丽（1967-），女，中国陕西绥德人，硕士，教授，硕士生导师，就职于延安大学数计学院，从事数论研究。

 DOI: https://doi.org/10.12345/jxffcxysj.v4i12.7530

$$\begin{cases} 4\varphi(a)-\varphi^2(b)\geq 0 \\ 2\varphi(a)-\varphi(b)-12\leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

的全部正整解 (a,b) 为

(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(6,1),(6,2),(3,3),(3,4),(3,6),(4,3),(4,4),(4,6),(6,3),(6,4),(6,6),(5,1),(5,2),(8,1),(8,2),(10,1),(10,2),(12,1),(12,2),(5,3),(5,4),(5,6),(8,3),(8,4),(8,6),(10,3),(10,4),(10,6),(12,3),(12,4),(12,6),(5,5),(5,8),(5,10),(5,12),(8,5),(8,8),(8,10),(8,12),(10,5),(10,8),(10,10),(10,12),(12,5),(12,8),(12,10),(12,12),(7,1),(7,2),(9,1),(9,2),(14,1),(1,2),(18,1),(18,2),(7,3),(7,4),(7,6),(9,3),(9,4),(9,6),(14,3),(14,4),(14,6),(18,3),(18,4),(18,6),(7,5),(7,8),(7,10),(7,12),(9,5),(9,8),(9,10),(9,12),(14,5),(14,8),(14,10),(14,12),(18,5),(18,8),(18,10),(18,12),(15,5),(15,8),(15,10),(15,12),(16,5),(16,8),(16,10),(16,12),(20,5),(20,8),(20,10),(20,12),(24,5),(24,8)(24,10),(24,12),(30,5),(30,8),(30,10),(30,12)。

证明：令 $x=\varphi(a)$，$y=\varphi(b)$，则不等式组（1）可化为

$$\begin{cases} y^2\leq 4x \\ 2x-y-12\leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

在 xoy 平面直角坐标系中，$y^2=4x$ 表示一条抛物线，$2x-y-12=0$ 表示一条直线，从而得 $0\leq x\leq 9$，$0\leq y\leq 6$，又显然 $x\geq 1$，$y\geq 1$，再结合引理 2，可得：$x=1,2,4,6,8$，$y=1,2,4,6$。于是 (x,y) 有 20 种可能的取值，经验证满足不等式（2）的（x,y）有以下 11 种情形：

情形 1：当 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=1$ 时，由引理 3 得，$a=1,2$；$b=1,2$。故此时满足不等式组(1)的 (a,b) 为 (1,1),(1,2),(2,1),(2,2)。

情形 2：当 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=2$ 时，由引理 3 得，$a=1,2$；$b=3,4,6$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6)。

情形 3：当 $\varphi(a)=2$，$\varphi(b)=1$ 时，由引理 3 得，$a=3,4,6$；$b=1,2$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(6,1),(6,2)。

情形 4：当 $\varphi(a)=2$，$\varphi(b)=2$ 时，由引理 3 得，$a=3,4,6$；$b=3,4,6$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (3,3),(3,4),(3,6),(4,3),(4,4),(4,6),(6,3),(6,4),(6,6)。

情形 5：当 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=1$ 时，由引理 3 得，$a=5,8,10,12$；$b=1,2$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (5,1),(5,2),(8,1),(8,2),(10,1),(10,2),(12,1),(12,2)。

情形 6：当 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=2$ 时，由引理 3 得，$a=5,8,10,12$；$b=3,4,6$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (5,3),(5,4),(5,6),(8,3),(8,4),(8,6),(10,3),(10,4),(10,6),(12,3),(12,4),(12,6)。

情形 7：当 $\varphi(a)=4$，$\varphi(b)=4$ 时，由引理 3 得，$a=5,8,10,12$；$b=5,8,10,12$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (5,5),(5,8),(5,10),(5,12),(8,5),(8,8),(8,10),(8,12),(10,5),(10,8),(10,10),(10,12),(12,5),(12,8),(12,10),(12,12)。

情形 8：当 $\varphi(a)=6$，$\varphi(b)=1$ 时，由引理 3 得，$a=7,9,14,18$；$b=1,2$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (7,1),(7,2),(9,1),(9,2),(14,1),(1,2),(18,1),(18,2)。

情形 9：当 $\varphi(a)=6$，$\varphi(b)=2$ 时，由引理 3 得，$a=7,9,14,18$；$b=3,4,6$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (7,3),(7,4),(7,6),(9,3),(9,4),(9,6),(14,3),(14,4),(14,6),(18,3),(18,4),(18,6)。

情形 10：当 $\varphi(a)=6$，$\varphi(b)=4$ 时，由引理 3 得，$a=7,9,14,18$；$b=5,8,10,12$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (7,5),(7,8),(7,10),(7,12),(9,5),(9,8),(9,10),(9,12),(14,5),(14,8),(14,10),(14,12),(18,5),(18,8),(18,10),(18,12)。

情形 11：当 $\varphi(a)=8$，$\varphi(b)=4$ 时，由引理 3 得，$a=15,16,20,24,30$；$b=5,8,10,12$。故此时满足不等式组（1）的 (a,b) 为 (15,5),(15,8),(15,10),(15,12),(16,5),(16,8),(16,10),(16,12),(20,5),(20,8),(20,10),(20,12),(24,5),(24,8),(24,10),(24,12),(30,5),(30,8),(30,10),(30,12)。

综上所述可知，该定理得证。

3.2 定理 2

满足不等式 $\varphi^2(a)+\varphi^2(b)\leq 36$ 的全部正整数解（x,y）为 (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,8),(1,10),(1,12),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,8),(2,10),(2,12),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(3,8),(3,10),(3,12),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(4,8),(4,10),(4,12),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(5,8),(5,10),(5,12),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(6,8),(6,10),(6,12),(8,1),(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(8,6),(8,8),(8,10),(8,12),(10,1),(10,2),(10,3),(10,4),(10,5),(10,6),(10,8),(10,10),(10,12),(12,1),(12,2),(12,3),(12,4),(12,5),(12,6),(12,8),(12,10),(12,12).

证明令 $x=\varphi(a)$，$y=\varphi(b)$，则：

$$\varphi^2(\mathrm{a})+\varphi^2(b)\leq 36 \quad (1)$$

可化为：

$$x^2+y^2\le 36 \qquad (2)$$

不等式（2）在 xOy 直角坐标系中表示以原点 O 为心，半径为 6 的圆及其内部，从而 $-6\le x\le 6$，且 $-6\le y\le 6$，又显然 $x\ge 1$，且 $y\ge 1$，故可得 $1\le x\le 5$，$1\le y\le 5$，即 $1\le\varphi(a)\le 5$，$1\le\varphi(b)\le 5$，由引理 3 可得 φ（a）=1,2,4，且 φ（b）=1,2,4。下面分 9 种情况来进行讨论：

情况 1：若 φ（a）=1，φ（b）=1，由引理 3 得 a=1,2,b=1,2，即此时满足（1）的解为（a,b）=(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)。

情况 2：若 φ（a）=1，φ（b）=2，由引理 3 得 a=1,2,b=3,4，6，即此时满足（1）的解为 (a,b)=(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(1,6),(2,6)。

情况 3：若 φ（a）=1，φ（b）=4，由引理 3 得 a=1,2,b=5,8,10,12，即此时满足（1）的解为 (a,b)=(1,5),(1,8),(1,10),(1,12),(2,5),(2,8),(2,10),(2,12)。

情况 4：若 φ（a）=2，φ（b）=1，由引理 3 得 a=3,4,6,b=1,2，即此时满足（1）的解为（a,b）=(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(6,1),(6,2)。

情况 5：若 φ（a）=2，φ（b）=2，由引理 3 得 a=3,4,6,b=3,4,6，即此时满足（1）的解为（a,b）=(3,3),(3,4),(3,6),(4,3),(4,4),(4,6),(6,3),(6,4),(6,6)。

情况 6：若 φ（a）=2，φ（b）=4，由引理 3 得 a=3,4,6,b=5,8,10,12，即此时满足（1）的解为（a,b）=(3,5),(3,8),(3,10),(3,12)(4,5),(4,8),(4,10),(4,12),(6,,5),(6,8),(6,10),(6,12)。

情况 7：若 φ（a）=4，φ（b）=1，由引理 3 得 a=5,8,10,12,b=1，2，即此时满足（1）的解为（a,b）=(5,1),(5,2),(8,1),(8,2)(10,1),(10,2),(12,1),(12,2)。

情况 8：若 φ（a）=4，φ（b）=2，由引理 3 得 a=5,8,10,12,b=3,4,6，即此时满足（1）的解为（a,b）=(5,3),(5,4),(5,6),(8,3),(8,4),(8,6),(10,,3),(10,4),(10,6),(12,,3),(12,4),(12,6)。

情况 9：若 φ（a）=4，φ（b）=4，由引理 3 得 a=5,8,10,12,b=5,8,10,12，即此时满足（1）的解为（a,b）=(5,5),(5,8),(5,10),(5,12),(8,,5),(8,8),(8,10),(8,12),(10,5),(10,8),(10,10),(10,12)(12,5),(12,8),(12,10),(12,12)。

综上所述可知，该定理得证。

4 结语

众所周知，数论是历史最悠久的数学分支之一，经过很长时间的发展，其内容和研究方法在不断发生革命性的变化，现代数论与古典数论相比，其研究方法更具综合性，数论与代数、几何、分析、拓扑等其他数学分支的联系越来越紧密，因此有效利用其他数学分支中的理论和方法来研究数论问题已成为大势所趋。论文将数论问题与解析几何方法相结合，是对数论问题研究的一次简单尝试，希望对其他数论爱好者提供一点启发。

参考文献

[1] 张四保 . 有关 Euler 函数 $\varphi(x)$ 的方程的正整数解 [J]. 数学的实践与认识 ,2014,44(20):302-305.

[2] 张四保 , 刘启宽 . 关于 Euler 函数一个方程的正整数解 [J]. 东北师范大学学报 (自然科学版),2015,47(3):49-54.

[3] 张四保 , 席小忠 . 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解 [J]. 南京师范大学学报 (自然科学版),2016,39(1):41-47.

[4] 张明丽 , 高丽 . 欧拉方程 $\varphi(mn)=2^2\times 3(\varphi(m)+\varphi(n))$ 的正整数解 [J]. 延安大学学报 (自然科学版),2018,37(2):5-9.

[5] 华罗庚 . 数论导引 [M]. 北京 : 科学出版社 ,1957.

[6] 潘承洞 , 潘承彪 . 代数数论 [M]. 哈尔滨 : 哈尔滨工业大学出版社 ,2014.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. 哈尔滨 : 哈尔滨工业大学出版社 ,2016.

[8] 朱尧辰 . 数的几何引论 [M]. 合肥 : 中国科学技术大学出版社 ,2019.

[9] 潘承洞 , 潘承彪 . 初等数论 [M]. 北京：北京大学出版社 ,1992.

[10] 姜友谊 . 关于 Euler 函数方程 $\varphi(x)=m$ 的解 [J]. 重庆工业管理学院学报 (自然科学版),1998,12(5):91-94.