Representation of Several Types of Predator-prey Systems on Time Scales

Quande Jiang

Mathematics Teaching and Research Department of School of Finance and Trade, Guangdong Industry Polytechnic, Guangzhou, Guangdong, 510300, China

Abstract

Based on the time scale definition and the characteristics of the time scale operation, this paper discusses three kinds of prey-predator system model on the time scale, and in the continuous and discrete state equation of the form, and points out that the biological meaning of the variables in the system, the method can consider the representation of more other systems on the time scale, and the result can be applied to study the differential equation of predator-prey system and the differential equation of predator-prey system.

Keywords

predator-prey system; time scale; continuous; discrete

几类捕食者 – 食饵系统在时标上的表示

姜全德

广东轻工职业技术学院财贸学院数学教研室，中国·广东 广州 510300

摘　要

论文利用时标的定义和时标运算性质，讨论了三类捕食者-食饵系统模型在时标上的表示，以及在连续和离散状态下方程形式，并且指出了系统的各变量的生物学含义，该方法可以考虑更多其他系统的时标上的表示，该结果可以应用于研究捕食者-食饵系统微分方程与捕食者-食饵系统差分方程。

关键词

捕食者-食饵系统；时标；连续；离散

1 引言

捕食系统 [1-7] 在生物学上动物种群演化，经济学上公司的竞争，社会学上种族的演化等诸多方面都有广泛的应用背景。目前，很多学者研究了连续和离散型捕食系统，但在时标上研究捕食系统较少 [8-9]。时标动力学是一种更广泛的方程类型，它包含微分方程和差分方程作为特例，是近年新兴的研究领域。论文将列举几类捕食系统在时标上的表示，以期起到抛砖引玉的作用。

2 基本定义

①定义 2.1[10] 时标 T 是实数集 R 的一个任意的非空闭子集。时标 T 具有实数集 R 的标准拓扑。

② 定义 2.2[10] 前跳算子 σ：$T\to T$，后跳算子 $\rho:T\to T$，粒函数 $\mu:T\to R^+=[0,+\infty)$，分别定义为：$\sigma(t)=\inf\{s\in T:s>t\}$，$\rho(t)=\sup\{s\in T,s<t\}$，$\mu(t)=\sigma(t)-t$，$t\in T$。

③ 定义 2.3[10] 设函数 $f:T\to R$，$t\in T$，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在实数 $f^\Delta(t)$ 和 t 的邻域 U，使得 $\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^\Delta(\sigma(t)-s)\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$，$s\in U$，则 $f^\Delta(t)$ 称作是 f 在 t 点的 delta(或 Hilger) 导数 .

④定义 2.4[10] 设 f、g 都是时标 T 上 delta 可导，对于任意的 v_1、v_1，有：

(i) $(v_1f+v_2g)^\Delta=v_1f^\Delta+v_2g^\Delta$；

(ii) $(fg)^\Delta(t)=f^\Delta(t)g(t)+f(\sigma(t))g^\Delta(t)=f(t)g^\Delta(t)+f^\Delta(t)g(\sigma(t))$.

3 主要结果

3.1 考虑 Hassell–Varley 型捕食者 – 食饵系统

$$\begin{cases}x_1^{'}(t)=x_1(t)[k(t)-r(t)x_1(t)]-\dfrac{b(t)x_1(t)x_2(t)}{\alpha+a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}\\ x_2^{'}(t)=-c(t)x_2(t)+\dfrac{d(t)x_1(t)x_2(t)}{\beta+a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}\end{cases},\qquad t\in R \tag{1}$$

其中，$x_1(t)$ 和，$x_2(t)$ 分别是食饵和捕食者的密度，

【基金项目】广东轻工职业技术学院科研项目（项目编号：KJ2019–029）。

【作者简介】姜全德（1980–），女，中国黑龙江泰来人，博士，讲师，从事泛函微分方程研究。

$k(t)$、$b(t)$、$d(t)$、$c(t)$ 都是正值函数分别是食饵的内蕴增长率、俘获率、转换率、捕食者的自然死亡率；$\frac{1}{r}$ 表示环境容纳率；α，β 都是正的常数；$m\in(0,+\infty)$ 称为 Hassell-Varley 常数，当 m=1 时，系统（1）退化为比例依赖型捕食者 - 食饵系统，当 m=0 时，系统（1）退化为 Holling II 捕食者 - 食饵系统。

令系统 (1) 中 $x_1(t)=\exp\{u_1(t)\},x_2(t)=\exp\{u_2(t)\}$，并且推广 R 到时标 T 上，所以有：

$$\begin{cases} u_1^{\Delta}(t)=r(t)-r(t)\exp\{u_1(t)\}-\dfrac{b(t)\exp\{u_2(t)\}}{\alpha+a(t)\exp\{u_1(t)\}+\exp\{mu_2(t)\}} \\ u_2^{\Delta}(t)=-c(t)+\dfrac{d(t)\exp\{u_1(t)\}}{\beta+a(t)\exp\{u_1(t)\}+\exp\{mu_2(t)\}} \end{cases},\quad t\in T \qquad (2)$$

系统（2）即系统（1）的时标上的推广。

系统（2）中，如果 T=Z（整数集），则系统（2）退化为离散时间系统：

$$\begin{cases} x_1(t+1)=x_1(t)\exp\{k(t)-r(t)x_1(t)-\dfrac{b(t)x_2(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}\} \\ x_2(t+1)=x_2(t)\exp\{-c(t)+\dfrac{d(t)x_1(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}\} \end{cases} \qquad (3)$$

3.2 考虑带有收获项的 Hassell–Varley 型捕食者 – 食饵系统

$$\begin{cases} x_1^{'}(t)=x_1(t)[k(t)-r(t)x_1(t)]-\dfrac{b(t)x_2(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}]-h_1(t) \\ x_2^{'}(t)=x_2(t)[-c(t)+\dfrac{d(t)x_1(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}]-h_2(t) \end{cases},\quad t\in R \qquad (4)$$

其中 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 分别是食饵和捕食者的收获项，其它参变量同系统（1）。

令系统（4）中 $x_1(t)=\exp\{u_1(t)\},x_2(t)=\exp\{u_2(t)\}$，并且推广 R 到时标 T 上，所以有：

$$\begin{cases} u_1^{\Delta}(t)=k(t)-r(t)\exp\{u_1(t)\}-\dfrac{b(t)\exp\{u_2(t)\}}{\alpha+a(t)\exp\{u_1(t)\}+\exp\{mu_2(t)\}}-h_1(t)\exp\{-u_1(t)\} \\ u_2^{\Delta}(t)=-c(t)+\dfrac{d(t)\exp\{u_1(t)\}}{\beta+a(t)\exp\{u_1(t)\}+\exp\{mu_2(t)\}}-h_2(t)\exp\{-u_2(t)\} \end{cases},\quad t\in T \qquad (5)$$

系统（5）即系统（4）的时标上的推广。

系统（5）中，如果 T=Z（整数集），则系统（5）退化为离散时间系统：

$$\begin{cases} x_1(t+1)=x_1(t)\exp\{k(t)-r(t)x_1(t)-\dfrac{b(t)x_2(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}-\dfrac{h_1(t)}{x_1(t)}\} \\ x_2(t+1)=x_2(t)\exp\{-c(t)+\dfrac{d(t)x_1(t)}{a(t)x_1(t)+x_2^m(t)}-\dfrac{h_2(t)}{x_2(t)}\} \end{cases} \qquad (6)$$

3.3 考虑具有阶段结构的三种群捕食者 – 食饵系统

$$\begin{cases} x_1^{'}(t)=a(t)x_2(t)-b(t)x_1(t)-d(t)x_1^{r}(t)-\dfrac{h_1(t)x_1(t)y_1(t)}{\alpha+k_1(t)+x_1^2(t)}, \\ x_2^{'}(t)=c(t)x_1(t)-f(t)x_2^{r}(t)-\dfrac{h_2(t)x_2(t)y_2(t)}{\beta+k_2(t)+m(t)x_2(t)+n(t)y_2(t)}, \\ y_1^{'}(t)=y_1(t)[-q_1(t)+\dfrac{p_1(t)x_1(t)}{\chi+k_1(t)+x_1^{r}(t)}-g_1(t)y_1(t)], \\ y_2^{'}(t)=y_2(t)[-q_2(t)+\dfrac{p_2(t)x_1(t)}{\delta+k_2(t)+m(t)x_2(t)+n(t)y_2(t)}-g_2(t)y_2(t)], \end{cases},\quad t\in R \qquad (7)$$

其中 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 分别是食饵和捕食者的收获项，f，pi，qi，gi 都是正值函数；r 是正整数，其它参变量同系统（1）。

令系统（7）中 $x_1(t)=\exp\{u_1(t)\},x_2(t)=\exp\{u_2(t)\}$，并且推广 R 到时标 T 上，所以有：

$$\begin{cases} u_1^{\Delta}(t)=a(t)u_2(t)-b(t)u_1(t)-d(t)u_1^{r}(t)-\dfrac{h_1(t)u_1(t)\exp(u_3(t))}{\alpha+k_1(t)+u_1^k(t)}, \\ u_2^{\Delta}(t)=c(t)u_1(t)-f(t)u_2^{r}(t)-\dfrac{h_2(t)u_2(t)\exp(u_4(t))}{\beta+k_2(t)+m(t)u_2(t)+n(t)\exp(u_4(t))}, \\ u_3^{\Delta}(t)=-q_1(t)+\dfrac{p_1(t)u_1(t)}{\chi+k_1(t)+u_1^k(t)}-g_1(t)\exp(u_3(t)), \\ u_4^{\Delta}(t)=-q_2(t)+\dfrac{p_2(t)u_2(t)}{\delta+k_2(t)+m(t)u_2(t)+n(t)\exp(u_4(t))}-g_2(t)\exp(u_4(t)), \end{cases},\quad t\in T \qquad (8)$$

系统（8）即系统（7）的时标上的推广。

系统（8）中，如果 T=Z（整数集），则系统（8）退化为离散时间系统：

$$\begin{cases} x_1(t+1)=a(t)x_2(t)-b(t)x_1(t)-d(t)x_1^{r}(t)-\dfrac{h_1(t)x_1(t)y_1(t)}{\alpha+k_1(t)+x_1^2(t)}, \\ x_2(t+1)=c(t)x_1(t)-f(t)x_2^{\eta}(t)-\dfrac{h_2(t)x_2(t)y_2(t)}{\beta+k_2(t)+m(t)x_2(t)+n(t)y_2(t)}, \\ y_1(t+1)=y_1(t)\exp[-q_1(t)+\dfrac{p_1(t)x_1(t)}{\chi+k_1(t)+x_1^{r}(t)}-g_1(t)y_1(t)], \\ y_2(t+1)=y_2(t)\exp[-q_2(t)+\dfrac{p_2(t)x_1(t)}{\delta+k_2(t)+m(t)x_2(t)+n(t)y_2(t)}-g_2(t)y_2(t)], \end{cases},\quad t\in R \qquad (9)$$

4 结语

论文讨论了三类捕食者 - 食饵系统模型在时标上的表示，论文方法可以考虑更多其他系统的时标上的表示，该结果可以应用于研究捕食者 - 食饵系统微分方程与捕食者 - 食饵系统差分方程。

参考文献

[1] Ji W, Deng M. Coexistence and extinction of a periodic stochastic predator–prey model with general functional response[J]. Advances in Difference Equations, 2020, 2020(1):1-8.

[2] Zhang Y, Rong X, Zhang J. A diffusive predator-prey system with prey refuge and predator cannibalism[J]. Mathematical biosciences and engineering: MBE, 2019, 16(3):1445-1470.

[3] Xu X, Liu M. Global Hopf bifurcation of a general predator-prey system with diffusion and stage structures[J]. Journal of Differential Equations, 2020, 269(10):8370-8386.

[4] Chen X, Wang X. Qualitative analysis and control for predator-prey delays system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2019, 123:361-372.

[5] 张雷,叶晓君,仇华海.Stability of a Delayed Predator-prey System with Stage Structure for Prey[J].数学的实践与认识,2019,49(7):248-255.

[6] 王晖.具有捕获项和投放率的捕食模型的周期解[J].湖北民族学院学报(自然科学版),2019,37(2):151-155.

[7] 王利波,徐瑰瑰,雷学红.一类带有Hassell-Varley型和延迟的非选择收获食饵捕食模型的概周期解[J].应用数学,2018,31(1):95-107.

[8] 徐昌进.时标上具有阶段结构的三种群捕食系统的周期解[J].经济数学,2013,30(1):5-11.

[9] 温绍雄,范猛.具有Hassell-Varley型功能性反应的捕食者-食饵系统周期解的存在性[J].东北师大学报(自然科学版),2011,43(1):10-15.

[10] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales An Introduction with Applications[M]. 2001.