Common Fixed Points and Common Endpoints of Multi-valued and Generalized Weak Contraction Mappings

Congdian Cheng[1] **Boxin Zheng**[2]

1.Geely College, Chengdu, Sichuan, 641400, China

2.Ganjingzi District Hongqi Subdistrict Office, Dalian, Liaoning, 116000, China

Abstract

Let (X,d) be a complete metric space, and let $S,T:X\to CB(X)$ be a duality of multi-valued generalized weak contraction mappings or a duality of generalized φ-weak contraction mappings. We discuss their common fixed points and common endpoints. Our contributions extend and improve some results given by DAFFER and KANEKO (1995), ROUHANI and MORADI (2010), and MORADI and KHOJASTEH (2011). In particular, the theory of endpoints has been extended to the theory of common endpoints.

Keywords

multi-valued mapping; weak contraction; common fixed point; common endpoint; Hausdorff metric

多值一般弱压缩映射的公共不动点和公共端点

程丛电 [1] 郑博心 [2]

1. 吉利学院，中国·四川 成都 641400

2. 甘井子区红旗街道办事处，中国·辽宁 大连 116000

摘 要

设(X,d)是一个完备的度量空间，而$S,T:X\to CB(X)$是对多值一般弱压缩或一般φ-弱压缩。讨论它们的公共不动点和公共端点，扩展与改进了Daffer与Kaneko（1995）,Rouhani与Moradi（2010）和Moradi与Khojasteh（2011）所给出的一些结果。特别地，将端点理论扩展成了公共端点理论。

关键词

多值映射；弱收缩；公共不动点；公共端点；豪斯道夫度量

1 引言

设(X,d)是一个度量空间，$CB(X)$表示该空间的全体有界闭子集。又设$S,T:X\to 2^X$是多值映射。当$x\in Tx$时称x为T的不动点。定义$Fix(T)=\{x\in X:x\in Tx\}$。当$Tx=\{x\}$时称$x$为$T$的端点（或稳定点）。用$End(T)$表示$T$的全体端点。

如果一个二元映射$\phi:X\times X\to[0,+\infty)$满足$\inf\{\phi(x,y):a\le d(x,y)\le b\}>0$，$\forall[a,b]\subseteq(0,+\infty)$称为紧正的。如果存在一个紧正的映射$\phi$使得$H(Tx,Ty)\le d(x,y)-\phi(x,y)$，$\forall x,y\in X$，这里$H(A,B):=\max\{\sup_{x\in B}d(x,A),\sup_{x\in A}d(x,B)\}$表示$CB(X)$上的豪斯道夫度量（见 Daffer 与 Kaneko[1]），称$T:X\to CB(X)$为弱紧的。

关于映射$T:X\to CB(X)$，如果存在映射$\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，满足$\varphi(t)<t,\forall t>0$，使得$H(Tx,Ty)\le\varphi(N(x,y))$，$\forall x,y\in X$，称其为一般$\varphi$-弱压缩映射，这里

$$N(x,y):=\max\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

关于两个映射$S,T:X\to CB(X)\ (S,T:X\to X)$，如果存在二元映射$\alpha:X\times X\to[0,1)$使得$H(Sx,Ty)\le\alpha(x,y)M(x,y)$，$\forall x,y\in X$，称它们为一般弱压缩对，这里

$$M(x,y):=\max\left\{d(x,y),d(x,Sx),d(y,Ty),\frac{d(x,Ty)+d(y,Sx)}{2}\right\}$$

关于两个映射$S,T:X\to CB(X)$，如果存在映射$\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，满足$\varphi(t)<t,\forall t>0$，使得$H(Sx,Ty)\le\varphi(M(x,y))$，$\forall x,y\in X$（或等价地，如果存在映射$\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，，满足$\varphi(t)<t,\forall t>0$，使得$H(Sx,Ty)\le M(x,y)-\phi(M(x,y))$，$\forall x,y\in X$），称它们为一般$\varphi$-弱压缩对。

关于映射$T:X\to CB(X)$，如果$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Tx}d(x,y)=0$，称其有近似端点性质。

关于多值压缩映射的不动点，近五十年来一直是不动点研究领域的一项重要的研究内容[1-5]。关于多值映射端

【作者简介】程丛电（1960–），男，中国四川内江人，硕士，教授，从事算法与金融统计研究。

点的研究早在 30 年前也已进行，且近年来取得了瞩目的成果[5-10]。在众多的研究中，与本文密切相关的几个重要成果如下。

首先 Nadler[2]（1969）通过如下定理将 Banach 压缩原理推广到了多值映射。

定理 1.1：命 (X,d) 是一个完备度量空间。设 $T:X\to$ ($CB(X)$ 是一个压缩映射，即对于满足 $0\le\alpha<1$ 的某 α 有 $H(Tx,Ty)\le\alpha d(x,y),\forall x,y\in X$，则存在 $x\in X$ 使得 $x\in Tx$。

1995 年，Daffer 和 Kaneko 证明了 [1，Theorem 3.3] 与 [1，Theorem 2.3]。后来，张和宋证明了单值一般 φ - 弱压缩对存在公共不动点 [3，Theorem 2.1]。通过将 [3，Theorem 2.1] 中的两个单值映射扩展为两个多值映射，并将 [1，Theorem 3.3] 中的一个多值映射扩展为一对多值映射，Rouhani 和 Moradi（2010）在不假定 $x\to d(x,Tx)$ 或 $x\to d(x,Sx)$ 为 l.s.c. 的条件下证明了一个耦合定理 [4，Theorem 3.1]；还进一步证明了定理 [4，Theorem 4.1]。最后，关于多值映射的端点，Amini-Harandi（2010）证明了 [6，Theorem 2.1]；Moradi 和 Khojasteh（2011）将 [6，Theorem 2.1] 推广到了 [7，Theorem 2.1]。

受到上述工作的影响和鼓励，论文进一步研究一般弱（φ - 弱）压缩对的公共不动点和公共端点。此项工作推广与改进了上述结果，并丰富了该研究领域的内容。

2 预备知识

这节给出几个后续工作的引理。

引理 2.1：设 (X,d) 是一个完备度量空间，且 $S,T:X\to CB(X)$ 是一般弱（—弱）压缩对，则 $Fix(S)=Fix(T)$。

证：设 $x\in Fix(S)$，则

$$d(x,Tx)\le H(Sx,Tx)\le\alpha(x,x)M(x,x)$$

$$=\alpha(x,x)\max\left\{d(x,x),d(x,Sx),d(x,Tx),\frac{d(x,Tx)+d(x,Sx)}{2}\right\}$$

$$=\alpha(x,x)d(x,Tx).$$

因 $\alpha(x,x)<1$，由此可得 $d(x,Tx)=0$。也就是，$x\in Fix(T)$。故，$Fix(S)=Fix(T)$。证毕。

引理 2.2：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$\gamma\in[0,1)$，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列且满足：

$$d(x_n,x_{n+1})\le\gamma d(x_{n-1},x_n)+\frac{1}{2^n},\forall n\in\mathbb{N} \qquad （式 1）$$

（$x_0\in X$），则 $\{x_n\}$ 收敛。

证：由 (式 1), $\forall n\in\mathbb{N}$，

$$d(x_n,x_{n+1})\le\gamma d(x_{n-1},x_n)+\frac{1}{2^n}\le\gamma\left[\gamma d(x_{n-2},x_{n-1})+\frac{1}{2^{n-1}}\right]+\frac{1}{2^n}$$

$$\le\gamma^2 d(x_{n-2},x_{n-1})+\frac{\gamma}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\cdots$$

$$\le\gamma^n d(x_0,x_1)+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma}{2^{n-1}}+\frac{\gamma^0}{2^n}\le\frac{M}{1-\gamma}\left(\frac{\gamma^n}{2^0}+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma}{2^{n-1}}+\frac{\gamma^0}{2^n}\right),$$

这里 $M=\max\{d(x_0,x_1),1\}$。不失一般性，设 $M=1$，则

$$d(x_n,x_{n+1})\le\frac{\gamma^n}{2^0}+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma^1}{2^{n-1}}+\frac{\gamma^0}{2^n}. \qquad （式 2）$$

由 (式 2), $\forall n,m\in\mathbb{N}$，我们有

$$d(x_n,x_{n+m})$$

$$\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_n,x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+m-1},x_{n+m})$$

$$\le\left(\frac{\gamma^n}{2^0}+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma}{2^{n-1}}+\frac{\gamma^0}{2^n}\right)+\left(\frac{\gamma^{n+1}}{2^0}+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma}{2^n}+\frac{\gamma^0}{2^{n+1}}\right)+\cdots$$

$$\left(\frac{\gamma^{n+m-1}}{2^0}+\frac{\gamma^{n+m-2}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma^{m-1}}{2^n}+\frac{\gamma^{m-2}}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\gamma^0}{2^{n+m-1}}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2^0}\left(\gamma^n+\gamma^{n+1}+\cdots+\gamma^{n+m-1}\right)+\frac{1}{2^1}\left(\gamma^{n-1}+\gamma^n+\cdots+\gamma^{n+m-2}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^n}\left(\gamma^0+\gamma^1+\cdots+\gamma^{m-1}\right)\right]+\left[\frac{1}{2^{n+1}}\left(\gamma^0+\gamma^1+\cdots+\gamma^{m-2}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2^{n+m-2}}\left(\gamma^0+\gamma^1\right)+\frac{1}{2^{n+m-1}}\left(\gamma^0\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2^0}\left(\frac{\gamma^n-\gamma^{n+m}}{1-\gamma}\right)+\frac{1}{2^1}\left(\frac{\gamma^{n-1}-\gamma^{n+m-1}}{1-\gamma}\right)+\cdots+\frac{1}{2^n}\left(\frac{\gamma^0-\gamma^m}{1-\gamma}\right)\right]+$$

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{\gamma^0-\gamma^{m-1}}{1-\gamma}\right)+\frac{1}{2^{n+2}}\left(\frac{\gamma^0-\gamma^{m-2}}{1-\gamma}\right)+\cdots+\frac{1}{2^{n+m-1}}\left(\frac{\gamma^0-\gamma^1}{1-\gamma}\right)\right]$$

$$<\frac{1}{1-\gamma}\left[\left(\frac{\gamma^n}{2^0}+\frac{\gamma^{n-1}}{2^1}+\cdots+\frac{\gamma^0}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+m-1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}\left\{\gamma^n\left[\frac{1}{(2\gamma)^0}+\frac{1}{(2\gamma)^1}+\cdots+\frac{1}{(2\gamma)^n}\right]+\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+m}}}{1-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$<\frac{1}{1-\gamma}\left\{\gamma^n\left[\frac{1-\frac{1}{(2\gamma)^{n+1}}}{1-\frac{1}{(2\gamma)}}\right]+\frac{1}{2^n}\right\}$$

（式 3）

根据（式 3），若 $(2\gamma)>1$，则

$$d(x_n,x_{n+m})<\frac{1}{(1-\gamma)}\left\{\gamma^n\left[\frac{2\gamma}{2\gamma-1}\right]+\frac{1}{2^n}\right\}=\frac{1}{(1-\gamma)}\cdot\frac{(2\gamma)^{n+1}+2\gamma-1}{(2\gamma-1)2^n}$$

$$<\frac{2\gamma}{(2\gamma-1)(1-\gamma)}\cdot\left(\gamma^n+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{4\gamma^{n+1}}{(2\gamma-1)(1-\gamma)}$$

（式 4）

否则，$(2\gamma)<1$，我们有

$$d(x_n,x_{n+m})=\frac{1}{(1-\gamma)}\left[\gamma^n\cdot\frac{1-(2\gamma)^{n+1}}{(2\gamma)^n-(2\gamma)^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right]<\frac{1}{(1-\gamma)}\left[\frac{\gamma^n}{(2\gamma)^n-(2\gamma)^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-\gamma)}\left[\frac{1}{2^n(1-2\gamma)}+\frac{1}{2^n}\right]=\frac{1}{(1-\gamma)(1-2\gamma)2^{n-1}}$$

（式 5）

由（式 4）和（式 5），易知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，故 $\{x_n\}$ 收敛。证毕。

引理 2.3：命 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T:X\to CB(X)$ 是对一般弱压缩；再设 $\{x_n\}$ 是 X 中的收敛序列且 $x_{n+1}\in Sx_n$，$\forall$偶的$n\in\mathbb{N}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，$\limsup\limits_{k\to\infty}\alpha(x_{2k},x^*)<1$，则 $x^*\in Fix(T)=Fix(S)$。

证：根据条件，$\forall n\in\mathbb{N}$，我们有

$$d(x_{n+1},Tx^*)\le H(Sx_n,Tx^*)\le\alpha(x_n,x^*)M(x_n,x^*);$$

（式 6）

$$
\begin{aligned}
& M(x_n, x^*) \\
& = \max\left\{d(x_n,x^*), d(x_n,Sx_n), d(x^*,Tx^*), \frac{d(x_n,Tx^*)+d(x^*,Sx_n)}{2}\right\} \\
& \le \max\Big\{d(x_n,x^*), d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), \\
& \qquad \frac{d(x_n,x^*)+d(x^*,Tx^*)+d(x^*,x_n)+d(x_n,Sx_n)}{2}\Big\} \\
& \le \max\left\{d(x_n,x^*), d(x_n,x_{n+1}), d(x^*,Tx^*), d(x_n,x^*)+\frac{d(x^*,Tx^*)+d(x_n,x_{n+1})}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

（式 7）

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$，结合（式 6）和（式 7），我们进一步得到

$$d(x^*,Tx^*) \le \left[\limsup_{k\to\infty} \alpha(x_{2k},x^*)\right] \limsup_{k\to\infty} M(x_{2k},x^*) \le \left[\limsup_{k\to\infty} \alpha(x_{2k},x^*)\right] d(x^*,Tx^*).$$

因为 $\limsup\limits_{k\to\infty} \alpha(x_{2k},x^*) < 1$，由此可得 $d(x^*,Tx^*) = 0$，即 $x^* \in Tx^*$。证毕。

引理 2.4：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T: X \to CB(X)$ 是对一般弱压缩映射，则有如下结和各项论。① $End(S) = End(T) (\subseteq Fix(S) = Fix(T))$ 且 $|End(S)| \le 1$，这里 $|End(S)|$ 表示 $End(S)$ 的基数。（这意味着 S 和 T 有唯一的公共端点，或没有端点）②如果 S 和 T 有公共端点，那么 $\inf\limits_{x\in X}[H(\{x\},Sx)+H(\{x\},Tx)] = 0$，称为对 S 和 T 的近似端点性质。③如果 S 和 T 一个是单值的，那么 $End(S) = End(T) = Fix(S) = Fix(T)$。（这意味着 S 和 T 的不动点必是端点）

证：设 $x \in End(S)$，则由引理 2.1 得 $x \in Fix(S) = Fix(T)$。

故 $M(x,x) = 0$。于是 $H(\{x\},Tx) = H(Sx,Tx) \le \alpha(x,x) M(x,x) = 0$。故 $Tx = \{x\}$，即 $x \in End(T)$。因此 $End(S) = End(T)$。

令 $x, y \in End(S) = End(T)$，则 $M(x,y) = d(x,y)$，进而：

$$d(x,y) = H(\{x\},\{y\}) = H(Sx,Ty) \le \alpha(x,y) M(x,y) = \alpha(x,y) d(x,y).$$

由于 $\alpha(x,y) < 1$，$d(x,y) = 0$，即 $x = y$。因此 $|End(S)| \le 1$。①得证明，②显然，下进一步证③。不妨设 S 是单值的，则 $End(S) = Fix(S)$，所以 $End(T) = End(S) = Fix(S) = Fix(T)$。证毕。

3 公共不动点

现在，着力研究公共不动点。首先证明一个定理，通过将一个多值映射 T 扩展为两个多值映射 S 和 T 并改变其他条件，其改进了 [1，Theorem 2.3，Theorem 3.3]；此外，通过用 $\alpha(x,y)$ 替换常数因子 α 还推广了 [4，Theorem 3.1]。

定理 3.1：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T: X \to CB(X)$ 是对一般弱压缩映射且关于 X 中满足 $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ 单调减的序列 $\{x_n\}$ 有：

$$\sup\{\alpha(x_{2k-2},x_{2k-1}), \alpha(x_{2k},x_{2k-1}) \mid k \in \mathbb{N}\} < 1 \qquad (式 8)$$

而 α 为 u.s.c.（或如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n,x^*) < 1$），则 $Fix(S) = Fix(T) \ne \varnothing$。

证：①由引理 2.1，$Fix(S) = Fix(T)$。为了完成证明，只需证明 $Fix(S) = Fix(T) \ne \varnothing$。用反证法进行证明，设 $Fix(S) = Fix(T) = \varnothing$。

②设 $x_0 \in X$，则 $d(x_0,Sx_0) > 0$。显然，可选 $x_1 \in Sx_0$ 使得 $0 < d(x_0,x_1) < d(x_0,Sx_0)+1$，且 $d(x_1,Tx_1) > 0$。

令 $\varepsilon_1 = \min\{\frac{1}{2}, [1-\alpha(x_0,x_1)] d(x_0,x_1)\}$，则存在 $x_2 \in Tx_1$ 使得 $0 < d(x_1,x_2) < d(x_1,Tx_1)+\varepsilon_1$。令 $\varepsilon_2 = \min\{\frac{1}{2^2}, [1-\alpha(x_2,x_1)] d(x_1,x_2)\}$，则存在 $x_3 \in Sx_2$ 使得 $0 < d(x_2,x_3) < d(x_2,Sx_2)+\varepsilon_2$。据归纳原理，我们有下面一般结论。$\forall k \in \mathbb{N}$，令：

$$\varepsilon_{2k-1} = \min\{\tfrac{1}{2^{2k-1}}, [1-\alpha(x_{2k-2},x_{2k-1})] d(x_{2k-2},x_{2k-1})\},$$

则存在 $x_{2k} \in Tx_{2k-1}$ 使得 $0 < d(x_{2k-1},x_{2k}) < d(x_{2k-1},Tx_{2k-1}) + \varepsilon_{2k-1} \le d(x_{2k-1},Tx_{2k-1}) + \frac{1}{2^{2k-1}}$。再命：

$$\varepsilon_{2k} = \min\{\tfrac{1}{2^{2k}}, [1-\alpha(x_{2k},x_{2k-1})] d(x_{2k-1},x_{2k})\}$$

则存在 $x_{2k+1} \in Sx_{2k}$ 使得：

$$0 < d(x_{2k},x_{2k+1}) < d(x_{2k},Sx_{2k}) + \varepsilon_{2k} \le d(x_{2k},Sx_{2k}) + \tfrac{1}{2^{2k}}$$

③关于如上所构建的序列 $\{x_n\}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，当 n 为奇数时，我们有：

$$[1-\alpha(x_{n-1},x_n)] d(x_{n-1},x_n) \ge \varepsilon_n. \qquad (式 9)$$

进而，

$$
\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+1}) & < d(x_n,Tx_n) + \varepsilon_n \le H(Sx_{n-1},Tx_n) + \varepsilon_n \\
& \le \alpha(x_{n-1},x_n) M(x_{n-1},x_n) + \varepsilon_n \\
& \le \alpha(x_{n-1},x_n) M(x_{n-1},x_n) + \frac{1}{2^n},
\end{aligned}
\qquad (式 10)
$$

$$
\begin{aligned}
& M(x_{n-1},x_n) \\
& \le \max\left\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},Sx_{n-1}), d(x_n,Tx_n), \frac{d(x_{n-1},Tx_n)+d(x_n,Sx_{n-1})}{2}\right\} \\
& \le \max\left\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,Tx_n)}{2}\right\} \\
& \le \max\left\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})}{2}\right\} \\
& = \max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}.
\end{aligned}
\qquad (式 11)
$$

如果 $\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\} = d(x_n,x_{n+1})$，i.e. $d(x_{n-1},x_n) \le d(x_n,x_{n+1})$，那么，

$$[1-\alpha(x_{n-1},x_n)] d(x_{n-1},x_n) \le [1-\alpha(x_{n-1},x_n)] d(x_n,x_{n+1}), \qquad (式 12)$$

并且根据式 10 和式 11，我们有：

$$d(x_n,x_{n+1}) < \alpha(x_{n-1},x_n) d(x_n,x_{n+1}) + \varepsilon_n \Rightarrow [1-\alpha(x_{n-1},x_n)] d(x_n,x_{n+1}) < \varepsilon_n. \qquad (式 13)$$

综合式 12 与式 13, 得到 $[1-\alpha(x_{n-1},x_n)] d(x_{n-1},x_n) < \varepsilon_n$。这与式 9 矛盾，故：

$$\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\} \ne d(x_{n-1},x_n)$$

由此 $\max\{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\} = d(x_{n-1},x_n)$，$d(x_n,x_{n+1}) < d(x_{n-1},x_n)$

此外，由式 10 和式 11, 还有

$$d(x_n,x_{n+1}) < \alpha(x_{n-1},x_n) d(x_{n-1},x_n) + \tfrac{1}{2^n}. \qquad (式 14)$$

当 n 是偶数时，我们有

$$[1-\alpha(x_n,x_{n-1})] d(x_{n-1},x_n) \ge \varepsilon_n, \qquad (式 15)$$

$$
\begin{aligned}
& d(x_n,x_{n+1}) = d(x_{n+1},x_n) \\
& < d(Sx_n,x_n) + \varepsilon_n \le H(Sx_n,Tx_{n-1}) + \varepsilon_n \\
& \le d(Sx_n,x_n) + \varepsilon_n \le H(Sx_n,Tx_{n-1}) + \varepsilon_n \\
& \le \alpha(x_n,x_{n-1}) M(x_n,x_{n-1}) + \tfrac{1}{2^n},
\end{aligned}
\qquad (式 16)
$$

$$
\begin{aligned}
&M(x_n,x_{n-1})\\
&\le \max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,Sx_n),d(x_{n-1},Tx_{n-1}),\frac{d(x_n,Tx_{n-1})+d(x_{n-1},Sx_n)}{2}\right\}\\
&\le \max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n-1},x_n),\frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,Sx_n)}{2}\right\}\\
&\le \max\left\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}),\frac{d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})}{2}\right\}\\
&\le \max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\}.
\end{aligned}
$$
（式 17）

根据式 15、式 16 与式 17, 用与上相同的方法 , 还可得到 $d(x_n,x_{n+1})<d(x_{n-1},x_n)$ 且：

$$d(x_n,x_{n+1})<\alpha(x_n,x_{n-1})d(x_{n-1},x_n)+\tfrac{1}{2^n}.$$（式 18）

④根据③ , 显然 $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ 是递减的。因此式 8 成立。故存在 $\gamma<1$ 使得

$$\max\{\alpha(x_{2k-2},x_{2k-1}),\alpha(x_{2k},x_{2k-1})\}<\gamma,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

从而运用式 14 和式 18 可得式 1。于是，根据引理 2.2，$\{x_n\}$ 收敛。

最后 , 令 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$，则由于 α 是 u.s.c. 我们有 $\limsup_{n\to\infty}\alpha(x_n,x^*)\le\alpha(x^*,x^*)<1$。注意到 $\{x_n\}$ 的生成方法，由引理 2.3 可得 $x^*\in Tx^*$。这与 $Fix(T)=\varnothing$ 矛盾，所以 $Fix(S)=Fix(T)\neq\varnothing$。证毕。

为了说明上述定理推广了 [1，Theorem2.3], 现我们直接从定理 3.1 导出 [1，Theorem2.3]。

证明定理 1.3：令

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{\phi(x,y)}{d(x,y)},d(x,y)\neq 0;\\ 0,d(x,y)=0,\end{cases}$$

且 $S=T$，则 S 和 T 是对一般弱收缩。再命 $\{x_n\}$ 是 X 的满足 $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ 单调递减的序列。

设 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=r$。如果 $r>0$，那么由 ϕ 是紧正的可得 $\lambda(r,d(x_1,x_2))>0$。另一方面 , 由于 $r<d(x_n,x_{n+1})\le d(x_1,x_2)$，$\phi(x_n,x_{n+1})\ge\lambda(r,d(x_1,x_2))$。所以，我们有：

$$\alpha(x_n,x_{n+1})=1-\frac{\phi(x_n,x_{n+1})}{d(x_n,x_{n+1})}\le 1-\frac{\lambda(r,d(x_1,x_2))}{d(x_1,x_2)}<1.$$

同样，$\alpha(x_{n+1},x_n)\le 1-\dfrac{\lambda(r,d(x_1,x_2))}{d(x_1,x_2)}$。故式 8 成立。如果 $r=0$，则：

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\alpha(x_n,x_{n+1})&=\limsup_{n\to\infty}\left[1-\frac{\phi(x_n,x_{n+1})}{d(x_n,x_{n+1})}\right]\\
&\le\limsup_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda(d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}))}{d(x_n,x_{n+1})}\right]\\
&\le 1-\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda(d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1}))}{d(x_n,x_{n+1})}\\
&\le 1-\liminf_{\beta\to\infty}\frac{\lambda(\alpha,\beta)}{\beta}<1.
\end{aligned}
$$

同样地 , $\limsup_{n\to\infty}\alpha(x_{n+1},x_n)<1$。故式 8 成立。

令 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$，不失一般性，设 $d(x_n,x^*)\neq 0$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则：

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha(x_n,x^*)=\limsup_{n\to\infty}\left[1-\frac{\phi(x_n,x^*)}{d(x_n,x^*)}\right]\le 1-\liminf_{n\to\infty}\frac{\phi(x_n,x^*)}{d(x_n,x^*)}\le 1-\liminf_{\beta\to 0}\frac{\lambda(\alpha,\beta)}{\beta}<1.$$

综合以上结果 , 据定理 3.1 可知 , T 有不动点。证毕。

定理 3.2：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T:X\to CB(X)$ 是对一般 φ - 弱压缩而 φ 是 u.s.c. 且：

$$\limsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}<1,$$（式 19）

则 $Fix(S)=Fix(T)\neq\varnothing$。

证：$\forall(x,y)\in X\times X$,: 置

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(M(x,y))}{M(x,y)},M(x,y)\neq 0;\\ 0,M(x,y)=0.\end{cases}$$

容易验证 $H(Sx,Ty)\le\alpha(x,y)M(x,y)$。即 $S,T:\to CB(X)$ 是对关于 $\alpha(x,y)$ 的一般弱压缩。注意到 α 是 u.s.c. 和式 8 只在定理 3.1 的证明中的步④用到，易知步①、②和③可用于证明定理 3.1。因此，我们通过说明下面的步④来完成证明。

④ $\forall n\in\mathbb{N}$，假设 n 是奇数。注意 $0<d(x_{n-1},x_n)\le M(x_{n-1},x_n)$ 和 $\max\{d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n+1})\}=d(x_{n-1},x_n).$。

据式 11, 我们有 $M(x_{n-1},x_n)=d(x_{n-1},x_n)>0$。这便可以得到

$$\alpha(x_{n-1},x_n)=\frac{\varphi(d(x_{n-1},x_n))}{d(x_{n-1},x_n)}$$（式 20）

进一步，据式 14，我们有

$$d(x_n,x_{n+1})\le\varphi(d(x_{n-1},x_n))+\tfrac{1}{2^n}$$（式 21）

当 n 是偶数时 , 用同样的推理 , 可以得到式 21 和

$$\alpha(x_n,x_{n-1})=\frac{\varphi(d(x_{n-1},x_n))}{d(x_{n-1},x_n)}$$（式 22）

由 $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ 单调递减和有下界可知 , 它是收敛的。令 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=r$。由 φ 是 u.s.c. 用式 21 可得 $r\le\varphi(r)$。因为 $\varphi(t)<t$，$t>0$，这又可导出，$r=0$。于是，根据式 19、式 20 和式 22, 分别可得：

$$\limsup_{k\to\infty}\alpha(x_{2k-2},x_{2k-1})=\limsup_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_{2k-2},x_{2k-1})}{d(x_{2k-2},x_{2k-1})}\le\limsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}<1,$$

$$\limsup_{k\to\infty}\alpha(x_{2k},x_{2k-1})=\limsup_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_{2k},x_{2k-1})}{d(x_{2k},x_{2k-1})}\le\limsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}<1.$$

故式 8 成立。运用 14 和式 19 可得式 1。因此根据引理 2.2，$\{x_n\}$ 是收敛的。

最后，令 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$，则关于每一个偶数 n，我们有式 7。这便得到 $\limsup_{k\to\infty}M(x_{2k},x^*)\le d(x^*,Tx^*)$。所以存在 b 使得 $M(x_{2k},x^*)\le b$。由于 φ 是 u.s.c. 且 $\limsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}<1$, 有 $\sup\left\{\frac{\varphi(t)}{t}\,|\,t\in(0,b]\right\}<1$。于是 ,

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha(x_n,x^*)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(M(x_n,x^*))}{M(x_n,x^*)}\le\sup\left\{\frac{\varphi(t)}{t}\,|\,t\in(0,b]\right\}<1$$

根据引理 2.3 可知，$x^* \in Tx^*$。这与 $Fix(T)=\varnothing$ 矛盾，故 $Fix(S)=Fix(T)\neq\varnothing$。证毕。

通过将 S 和 T 扩展为多值的，定理 3.2 推广了 [4,Theorem4.1]。可是 , 我们增加了条件式 8。当没有条件式 8 时 , 定理 3.2 是否成立是一个有待进一步研究的问题。

4 公共端点

现我们转而考虑公共端点。我们将端点理论推广为公共端点理论。

首先 , 根据定理 3.1(定理 3.2) 和引理 2, 我们可直接得到下面的推论。

推论 3.2. 在定理 3.1(定理 3.2 ）的条件下，如果 S 与 T 有一个是单值的，那么它们有唯一的公共不动点，该不动点也是它们唯一的公共端点。

当 S 与 T 都为多值时，我们有下面的定理 4.1 和定理 4.2。

定理 4.1：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T:X\to CB(X)$ 是对一般弱压缩而 φ 是 u.s.c. 且

$$\limsup_{n,m\to\infty}\alpha(x_n,x_m)<1 \tag{式 23}$$

当 $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)[1-\alpha(x_n,x_m)]=0$ 时。如果 S 与 T 有近似端点性质，那么它们有唯一的公共端点。

证 . 假设 S 与 T 有近似端点性质，则存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[H(\{x_n\},Sx_n)+H(\{x_n\},Tx_n)\right]=0$。$\forall m,n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}M(x_n,x_m)&=\max\left\{d(x_n,x_m),d(x_n,Sx_n),d(x_m,Tx_m),\frac{d(x_n,Tx_m)+d(x_m,Sx_n)}{2}\right\}\\&\le\max\{d(x_n,x_m),H(\{x_n\},Sx_n),H(\{x_m\},Tx_m),\\&\qquad\frac{d(x_n,x_m)+H(\{x_m\},Tx_m)+d(x_n,x_m)+H(\{x_n\},Sx_n)}{2}\Big\}\\&\le d(x_n,x_m)+H(\{x_n\},Sx_n)+H(\{x_m\},Tx_m).\end{aligned} \tag{式 24}$$

注意到 $d(x_n,x_m)\le H(\{x_n\},Sx_n)+H(Sx_n,Tx_m)+H(\{x_m\},Tx_m)$，据式 24，进一步有

$$\begin{aligned}M(x_n,x_m)&\le d(x_n,x_m)-H(\{x_n\},Sx_n)-H(\{x_m\},Tx_m)\\&\quad+2H(\{x_n\},Sx_n)+2H(\{x_m\},Tx_m)\\&\le H(Tx_n,Tx_m)+2H(\{x_n\},Sx_n)+2H(\{x_m\},Tx_m)\end{aligned} \tag{式 25}$$

这可导出

$$M(x_n,x_m)\le\alpha(x_n,x_m)M(x_n,x_m)+2H(\{x_n\},Sx_n)+2H(\{x_m\},Tx_m). \tag{式 26}$$

注意到 $d(x_n,x_m)\le M(x_n,x_m)$，运用 (4.4) 又得到

$$\begin{aligned}&d(x_n,x_m)[1-\alpha(x_n,x_m)]\le M(x_n,x_m)[1-\alpha(x_n,x_m)]\\&\le 2H(\{x_n\},Sx_n)+2H(\{x_m\},Tx_m)\Rightarrow\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)[1-\alpha(x_n,x_m)]=0\end{aligned} \tag{式 27}$$

关于式 27, 我们有式 23。再次运用式 26，得到

$$\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)\le[\limsup_{n,m\to\infty}\alpha(x_n,x_m)]\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m).$$

据式 23，由此得出 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)=0$。故 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)=0$ 即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。$\forall n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}&H(\{x_n\},Tx^*)-H(\{x_n\},Sx_n)\le H(Sx_n,Tx^*)\le\alpha(x_n,x^*)M(x_n,x^*)\\&=\alpha(x_n,x^*)\max\left\{d(x_n,x^*),d(x_n,Sx_n),d(x^*,Tx^*),\frac{d(x_n,Tx^*)+d(x^*,Sx_n)}{2}\right\}\\&\le\alpha(x_n,x^*)\max\{d(x_n,x^*),d(x_n,Sx_n),d(x^*,Tx^*),\\&\qquad\frac{d(x_n,x^*)+d(x^*,Tx^*)+d(x^*,x_n)+d(x_n,Sx_n)}{2}\Big\}\end{aligned}$$

再注意到 α 是 u.s.c., 又得

$$H(\{x^*\},Tx^*)\le\alpha(x^*,x^*)d(x^*,Tx^*)\le\alpha(x^*,x^*)H(\{x^*\},Tx^*).$$

由于 $\alpha(x^*,x^*)<1$，我们有 $H(x^*,Tx^*)=0$。故 $Tx^*=\{x^*\}$。最后 , 根据引理 4.2 可知，端点唯一。证毕。

定理 4.1 是端点理论的一个新结果。下面的定理 4.2 是本文的最后一个结果，其将 [7，Theorem 2.1] 的结果推广到了公共端点。

定理 4.2：设 (X,d) 是一个完备度量空间，$S,T:X\to CB(X)$ 是对一般 φ - 弱压缩而 φ 是 u.s.c. 且

$$\liminf_{t\to\infty}[t-\varphi(t)]>0 \tag{式 28}$$

如果 S 与 T 有近似端点性质，那么它们有唯一的公共端点。

证：假设 S 与 T 有近似端点性质，则存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}[H(\{x_n\},Sx_n)+H(\{x_n\},Tx_n)]=0$

并且 (4.2) 和 (4.3) 成立。据 (4.3) 我们有

$$M(x_n,x_m)\le\varphi(M(x_n,x_m))+2H(\{x_n\},Sx_n)+2H(\{x_m\},Tx_m) \tag{式 29}$$

若 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)=+\infty$，则 $\liminf\limits_{t\to\infty}[t-\varphi(t)]\le\liminf\limits_{n,m\to\infty}[M(x_n,x_m)-\varphi(M(x_n,x_m))]\le 0$。这与式 28 矛盾。所以 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)<+\infty$。注意到 $\varphi(t)$ 是 u.s.c. 且有式 29，可得

$$\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)\le\limsup_{n,m\to\infty}\varphi(M(x_n,x_m))\le\varphi(\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)).$$

注意到 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)<+\infty$ 与 $\varphi(t)<t$ for all $t>0$。由此可得 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)=0$。因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。$\forall n\in\mathbb{N}$，我们有

$$H(\{x_n\},Tx^*)-H(\{x_n\},Sx_n)\le H(Sx_n,Tx^*)\le\varphi(M(x_n,x^*))$$

于是

$$H(\{x^*\},Tx^*)\le\limsup_{n,m\to\infty}\varphi(M(x_n,x^*))\le\varphi(\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x^*)) \tag{式 30}$$

另一方面 ,

$$\begin{aligned}M(x_n,x^*)\le\max\{&d(x_n,x^*),d(x_n,Sx_n),d(x^*,Tx^*),\\&\frac{d(x_n,x^*)+d(x^*,Tx^*)+d(x^*,x_n)+d(x_n,Sx_n)}{2}\Big\}\end{aligned} \tag{式 31}$$

若 $H(\{x^*\},Tx^*)\neq 0$，据 (4.8) 和 (4.9) 我们有

$$H(\{x^*\},Tx^*)<\limsup_{n,m\to\infty}M(x_n,x_m)\le d(x^*,Tx^*)\le H(\{x^*\},Tx^*).$$

（下转第 105 页）

5 结语

小学数学这门课程更注重培养学生的学科素养与基本知识能力，随着中国素质教育理念的不断践行，新课改要求教师不仅要带领学生掌握相关的基础知识内容，还要注重培养学生对相关课程的学习兴趣，使得学生能够以积极乐观的心态完成相应的学习任务与目标，这样一来，在小学数学课堂上，学生既能够以全新的姿态投入到教学中，教师也能够及时地把握学生对知识的基本掌握情况，从而更好地进行课堂教学计划的改革与优化。会使得课堂的学习氛围逐渐活跃，学生与教师都会受到相应的鼓励，会更有利于小学数学课堂上学生学习效率的提升。

参考文献

[1] 朱红梅 . 新课程背景下小学数学教学生活化的开展策略研究 [J]. 中国校外教育 ,2016(4):1124.

[2] 郑海璇 . 新课程背景下小学数学教学生活化的开展策略研究 [J]. 读与写 : 上 , 下旬 ,2015(23):287-288.

[3] 伊琴珍 . 新课程背景下小学数学教学生活化的开展策略研究 [J]. 教育 ,2016(11):1220.

[4] 付善悦 . 小学数学教学生活化实施策略的探讨 [J]. 小作家选刊 (教学交流),2017(10):1285-1286.

（上接第 102 页）

该矛盾表明 $H(\{x^*\},Tx^*)=0$。也就是，$Tx^*=\{x^*\}$。最后，根据引理 2.4 得知端点是唯一的。证毕。

注：当 $S=T$ 时，由定理 4.2 和引理 2.4. 可直接得出 [7,Theorem 2.1]。

5 结语

论文在完备度量空间中研究了多值一般弱压缩映射对和多值一般 φ - 弱压缩映射对的公共不动点与公共端点。扩展与改进了文中文献里的一些结果。特别是，将关于一个映射的端点的理论扩展成了一对映射的公共端点的理论。所做工作可有力地促进分析学和不动点理论研究工作的发展。

参考文献

[1] Daffer, P Z, Kaneko, et al. Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings[J].Math.Anal.Appl,1995(192):655-666.

[2] Nadler, S B. Multi-valued contraction mappings[J]. Pacific J.Math,1969(30):475-488.

[3] Zhang, Q Song, Y. Fixed point theory for generalized φ -weak Contractions[J]. Appl.Math.Lett, 2009,22(1),75-78.

[4] Rouhani, B D, Moradi, et al. Common fixed point of multivalued generalized φ -weak contractive mappings[J]. Fixed Point Theory Appl,2010(8):1-13.

[5] Assad, N A, Kirk, et al. Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type[J]. Pacific J.Math,1972(43):553-562.

[6] Amini-Harandi, A. Endpoints of set-valued contractions in metric spaces[J]. Nonlinear Anal. TMA,2010(72):132-134.

[7] Moradi, S, Khojasteh, et al. Endpoints of multi-valued general-ized weak contraction mappings[J].Nonlinear Anal. TMA,2011(72):2170-2174.

[8] Aubin, J P, Siegel, et al. Fixed points and stationary points of dissipative multivalued maps[J].Proc.Amer.Math. Soc,1980(78):391-398.

[9] Lodarczyk, K W, Klim, et al. Existence and uniqueness of endpoints of closed set-valued asymptotic contractions in metric spaces[J].J.Math.Anal.Appl,2007(328):46-57.

[10] Wardowski, D. Endpoints and fixed points of a set-valued contractions in cone metric spaces[J].Nonlinear Anal TMA,2009(71):512-516.