Research on Solving Realistic Function by Using Negative High Power and Its Composite Function

Qingxiong Bu

Yunnan Kunfeng Project Management Company, Kunming, Yunnan, 650106, China

Abstract

Since the negative high-power function can accurately represent the numerical correspondence, the composite negative high-power function can represent any curve in different degrees (accurate, approximate, and piecewise approximate). Therefore, negative high power functions can be solved with multiple reality functions, which can then provide methods and basis for solving the establishment problems of some functions in scientific research, research and development, management and technical work.

Keywords

negative high power; compound; reality function; solution

利用负高次幂及其复合函数求解现实函数研究

布青雄

云南坤丰项目管理公司，中国·云南 昆明 650106

摘　要

由于负高次幂函数可以准确表示数值对应关系，复合负高次幂函数可以不同程度（准确、近似、分段近似）地表示任意曲线。因此，利用负高次幂函数可以求解多种现实函数，进而为解决科研、研发、管理、技术工作中的某些函数建立问题提供方法和依据。

关键词

负高次幂；复合；现实函数；求解

1 引言

依靠数据解决现实问题是大数据时代的显著特征，数据已经影响并改变人们工作、生活、学习的方方面面，这种改变将会持续并不断升级。数据关联—数据可视化—数据变化规律是升级的必然趋势和方向。函数是数据变化规律的高度概括 [1]，是数据变化规律最本质的反映。函数是利用有关理论（如微积分、运筹学、数学建模）分析和解决更多问题的基础前提。建立现实函数有明确而深远的意义。利用负高次幂及其复合函数可以求解多种现实函数 [2]，解决某些现实函数的建立问题。

2 负高次幂函数及其复合函数表达式

2.1 负高次幂函数表达式

负高次幂函数的表达式为：

$$y=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x^n}\lim_{x\to\infty}\ (\ n\in N\ )$$

α_0、α_1　$\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为常数。

2.2 通用函数表达式

在无数复合负高次幂函数中，有一个具有普遍适用、统一、定型等特点，这个复合负高次幂函数为：

$$y=x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x^n}}\right)$$

论文将这个复合负高次幂函数称为通用函数。

3 负高次幂函数可以准确表示数值对应关系的命题、证明及举例

3.1 命题

两个拟考察变量 x，y 的 n 个数值对应关系如表 1 所示。

表 1 xy 对应值表

x	a_1	a_2	……	a_n
y	b_1	b_2	……	b_n

其中，$a_i\neq a_j$，即 x 值没有重复，b_i（$i=1,2\cdots n$）不全为 0。则采用一个负高次幂函数可以准确表示这 n 个对应关系：

【作者简介】布青雄（1968–），男，中国云南昆明人，硕士，工程师，从事项目管理研究。

$$y=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{x^{n-1}}\quad(n\in N)$$

α_0、α_1 $\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ 为常数。

3.2 证明

把 n 个对应关系数值代入负高次幂函数，得到关于 α_0、α_1 $\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$ 为未知数的 n 元线性方程组：

$$A\alpha=b$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1^2} & \cdots & \frac{1}{a_1^{n-1}}\\ 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2^2} & \cdots & \frac{1}{a_2^{n-1}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n^2} & \cdots & \frac{1}{a_n^{n-1}}\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$|A^T|$ 为范德蒙德行列式，$|A^T|=\prod_{2\geq i>j\geq 1}(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j})$，当 $a_i\neq a_j$，总有 $|A|=|A^T|\neq 0$。

对于 n 元非奇次（b_i 不全为 0）线性方程组 $A\alpha=b$，当 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$，线性方程组总是有解，而且其解唯一。这就说明，对于 $a_i\neq a_j$ 的 n 个对应关系，总存在一组常数 α_0、α_1 $\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$，使得：

$$b_i=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{a_i}+\frac{\alpha_2}{a_i^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{a_i^{n-1}}\quad(i=1,2\cdots n)$$

恒成立，证毕。

以上要求 x 的值 $a_i\neq 0$，当 x 数值中存在 0 时，可以采用坐标平移方式 $u=x+c$ 解决。此时，负高次幂函数为：

$$v=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{u}+\frac{\alpha_2}{u^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{u^{n-1}}\quad(n\in N)$$

$$u=x+c,\quad v=y$$

3.3 举例验证

已知变量 xy 的对应关系如表 2 所示。

试用负高次幂函数表示这种对应关系。

由于普通计算机精度局限（15 次方以上的数据计算不准确），以上对应关系需要采用两个负高次幂函数表示。

① P1 ~ P11。

$$y=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{u}+\frac{\alpha_2}{u^2}+\cdots+\frac{\alpha_{10}}{u^{10}},\quad u=\frac{x}{1000}$$

② P11 ~ P20。

$$y=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{u}+\frac{\alpha_2}{u^2}+\cdots+\frac{\alpha_9}{u^9},\quad u=\frac{x}{1000}$$

换元的目的是确保数值大小在计算机能够识别的范围，换元的实质是将 x 的计量单位调整为原单位的 1000 倍。系数求解结果如表 3 所示。

表 2 xy 对应关系数值表

点编号	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
x	460.51	517.75	632.67	764.89	869.56	950.35	1020.02	1088.15	1172.95	1244.21
y	356.06	531.60	688.68	570.46	490.15	555.29	711.76	926.61	1111.88	924.45
点编号	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20
x	1316.88	1401.36	1518.04	1656.64	1805.87	1912.34	2031.26	2184.12	2367.70	2529.09
y	669.91	573.14	675.77	788.09	644.69	568.41	641.77	804.14	894.05	863.08

表 3 求解结果

	P_1 ~ P_{11}	P_{11} ~ P_{20}
α_0	313538854.536940	-180161615.32120
α_1	-2751597372.268830	3053589811.53860
α_2	10748521658.069500	-22849094001.52070
α_3	-24604147897.245800	99054562152.70030
α_4	36537572066.988500	-274142758935.38800
α_5	-36767099483.719500	502273432868.08000
α_6	25379679098.376600	-609191414099.62000
α_7	-11861398040.329900	471661533913.96300
α_8	3590349690.743840	-211541859903.36500
α_9	-635297821.626010	41878379333.64270
α_{10}	49879907.735150	-

4 通用函数可以表示数任意非负函数的命题、推论及证明

4.1 命题

若非负实数变量 xy 相互关联、存在函数关系，则一般可用通用函数表示二者关系：

$$y = x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x^i}}\right) \quad（n \in N，\ \alpha_i 为常数）$$

$$或 v = u\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{u^i}}\right)，\ \mathrm{u} = f(x)，\ \mathrm{v} = g(y)$$

4.2 推论

4.2.1 推论 1

对于定义域为 $x \geq 0$ 的任意非负函数 $y = f(x)$，通常可以用一个（或有限几个）通用函数准确表示：

$$y = f(x) \cong x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x^i}}\right)$$

$$或 y = f(x) \cong \begin{cases} x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i_1=1}^{n}\frac{\alpha_{i_1}}{x^{i_1}}}\right) & 0 < x \leq a \\ x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i_2=1}^{n}\frac{\alpha_{i_2}}{x^{i_2}}}\right) & a < x \leq b \\ \cdots & \cdots \\ x\tan\left(\frac{1}{\alpha_0 + \sum_{i_m=1}^{n}\frac{\alpha_{i_m}}{x^{i_m}}}\right) & c < x \leq d \end{cases}$$

4.2.2 推论 2

对于现实某特定曲线，通过建立适当坐标，通常可以用一个（或有限几个）通用函数表示曲线的变化规律。

4.2.3 推论 3

对于现实已知数值对应关系（如表 1 所示）的两个变量 xy，若数据完全能够客观反映 xy 之间的相互变化关系（连接所有点能形成一条光滑曲线）[3]，则通常可以用一个（或有限几个）通用函数表示 xy 之间的变化规律。

若现实变量值 $x < 0$，$y < 0$ 则通过坐标平移 $u = x + a$；$v = y + b$ 来满足变量取值条件。

4.3 命题证明

若两个变量 xy 相互关联、存在函数关系，则通过引入变量 θ，可以建立二元函数：

$$y = x\tan\theta$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

二元函数中的三个变量必定两两相关，互为函数（证明省略），记 θ、x 的关系为 $\theta = g(x)$。经过大量计算（负高次幂函数表示基本初等函数），负高次幂函数与反正切函数有着最为密切的关系（用负高次幂函数表示反正切函数最为容易、近似程度最高）。

对于 $v = \arctan u$，$\lim_{u\to\infty}\arctan u = \frac{\pi}{2}$，$\lim_{u\to 0}\arctan u = 0$，这与负高次幂函数的极限情况并不类似，而 $\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\arctan u} = \frac{2}{\pi}$，$\lim_{u\to 0}\frac{1}{\arctan u} = \infty$ 与负高次幂函数的极限情况相似，故设定（该设定的另外依据是 2.2 中的证明）：

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{g(x)} = f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\frac{\alpha_n}{x^n}$$

于是得到：

$$\theta = \frac{1}{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n}}$$

进而得到：

$$y = x\tan\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{x^i}}\right) \quad（n \in N，\ \alpha_i 为常数）$$

显然，以上证明并不充分（主要是 $\frac{1}{\theta} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\frac{\alpha_n}{x^n}$ 设定不充分），命题真伪有赖实例验证。若命题成立，则推论 1~3 均是顺理成章的结论。

参考文献

[1] 同济大学数学系.工程数学——线性代数[M].6版.北京:高等教育出版社,2014.

[2] 同济大学数学系.高等数学[M].7版.北京:高等教育出版社,2014.

[3] [美]哈姆迪·塔哈.运筹学基础[M].10版.刘德刚,译.北京:中国人民大学出版社,2018.