The Application and Reflection of Equivalent Relationships on Sets in the tuitions of Modern Algebra

Yuzhe Liu

Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou, 550025, China

Abstract

In algebra theory, group is an important algebraic system. Since a subgroup of a group provides a classification for the elements in this group, the properties of group can be considered by using subgroups, and then any group can be written as a union of some cosets given by subgroup. Furthermore, if a subgroup is normal, then the set of all cosets is also a group which is called a quotient group. This paper explores and reflects on the classroom teaching method of "subgroups and cosets" in the course of *Modern Algebra*, and advocates introducing the coset decomposition of subgroups and groups through equivalence relationships on sets in the teaching process.

Keywords

the tuition of abstract algebra; subgroups; cosets

集合上的等价关系在近世代数教学中的应用和思考

刘雨喆

贵州大学数学与统计学院，中国 · 贵州 贵阳 550025

摘　要

在代数学中，群是最基本的代数系统之一。由于一个群的子群总是可以为这个群中的元素提供一种分类方式，因此对群的研究往往可以通过对其子群的研究来完成。而这种分类将群分解为若干陪集的并，并且当子群是正规子群的情况下，全体陪集构成的集合也构成一个群，被称为商群。论文对《近世代数》课程中的"子群与陪集"这一内容的课堂教学方法展开了探讨和反思，并且论文也提倡在教学过程中，教师能通过集合上的等价关系来引入子群与群的陪集分解。

关键词

抽象代数教学；子群；陪集

1 引言

论文从集合上的等价类这一观点下，阐述了在《近世代数》教学过程中，如何利用给定群的子群定义群上的等价关系。作者所采用的《近世代数》教材见文献 [1] 第一章第 1.3，1.5 节，并使用 [2,3] 作为教学辅助用书。论文所介绍的教学方法也可以作为 [2] 第一章第 4 节授课时的参考。

【基金项目】贵州省科技厅科学计划项目面上项目（项目编号：ZK〔2024〕YiBan066）；贵州大学引进人才科研启动基金项目（贵大人基合字〔2022〕53号，〔2022〕65号）；贵州大学高等教育研究项目（项目编号：703217243301）资助。

【作者简介】刘雨喆（1992–），男，土家族，博士，讲师，从事同调代数与代数表示论研究。

2 集合上的等价关系

2.1 等价关系及其定义

对给定集合 S 以及定义在 S 上的一个二元关系"~"，如果此二元关系满足下面条件，则称其为等价关系：

①自反性：对任意 S 中的元素 x，有 x~x；

②对称性：对 $x, y \in S$ ，如果 x~y，则 x~y；

③传递性：设 $x, y, z \in S$ 满足 x~y 且 y~z，则 x~z。

等价关系是贯穿《近世代数》这门课程的最重要的二元关系之一。在教学过程中，通常采用的例子有：集合的元素之间的相等关系；整数集 $\mathbb{Z}$ 中的元素关于模 n 的剩余类；以及线性空间 $\mathbb{R}^d$ 关于某个子空间有相同投影的向量类等。此外，由于学生普遍反映《近世代数》内容抽象且难以理解，商群、商环以及商模等概念又涉及等价类的运算。因此，在讲解这部分内容时，算例的选择尤为重要。教师在教学过程中，不但需要通过具体算例引出商的概念，还需要通过商的概念回归到学生已学知识点，这些都是《近世代数》的教学难点。

2.2 教学过程中的算例

接下来，我们提供一些关于集合上等价关系的算例。

例 1: 定义整数集 ℤ 的二元关系“~”为 x~y 当且仅当 $x \equiv y (\bmod n)$。这里，同余式 $x \equiv y (\bmod n)$ 可以等价地写为

$$x - y \in n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\} \qquad (1)$$

可以证明，“~”是一个等价关系。这是因为：①$x - x = 0 \in n\mathbb{Z}$，$\forall x \in \mathbb{Z}$；②如果 $x - y \in n\mathbb{Z}$，则存在 $z \in \mathbb{Z}$ 使得 $x - y = nz$，由此可知 $y - x = n(-z) \in n\mathbb{Z}$，因此对称性成立；如果 $x - y \in n\mathbb{Z}$ 且 $y - x \in n\mathbb{Z}$；那么 $x - z = (x - y) + (y - z) \in n\mathbb{Z}$，传递性也成立。用集合 ℤ /n 表示整数关于模 n 的剩余类的集合，即 $\mathbb{Z}/n := \{[t] \mid 1 \le t < n\}$，其中，记号 $[t]$ 表示全体除以 n 余数是 t 的整数的集合，即 $[t] := n\mathbb{Z} + t$。则 $[0],[1],\ldots,[n-1]$ 为 ℤ 提供了一个在上述等价关系意义下的划分

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{0 \le t < n} [t] = \dot{\bigcup_{0 \le t < n}} [t] \qquad (2)$$

其中，记号 $\dot{\bigcup}$ 表示不交并。

例 2：定义域 F 上全体 n 阶可逆矩阵构成的集合为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，并定义 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上的二元关系“~”为 A~B 当且仅当 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，该定义可以等价地写为

$$\boldsymbol{AB}^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) := \{\boldsymbol{D} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \mid |\boldsymbol{D}| = 1\} \qquad (1)$$

显然，“~”是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上的一个等价关系。在上述等价意义下，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 中的矩阵按其行列式进行了分类，即有：

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \bigcup_{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}} \boldsymbol{X}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) = \dot{\bigcup_{|\boldsymbol{X}| \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}} \boldsymbol{X}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \qquad (2)$$

其中，$\boldsymbol{X}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) := \{\boldsymbol{XY} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \mid |\boldsymbol{Y}| = 1\}$。

在例 1 中，我们提供的集合 ℤ 的等价类是通过带余除法给出的，需要注意带余除法和整数的乘法本质上又是按通常的整数上的四则运算加法诱导，因此在 ℤ /n 可以自然地由 ℤ 上的加法定义剩余类的加法，即：

$$+ : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n,$$

$$[x] + [y] := [x + y] = [(x + y) \bmod n]。$$

此时，由于 ℤ 上的加法有交换律和结合律，因此 $\mathbb{Z}/n$ 上的剩余类加法也有交换律和结合律。例 2 中的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上的乘法取为矩阵乘法，于是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上的等价类之间的计算可以通过矩阵乘法定义，即：

$$\cdot : \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \times \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \to \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})},$$

$$\boldsymbol{X}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \cdot \boldsymbol{Y}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) := \boldsymbol{XY}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})。$$

其中，$\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} := \{\boldsymbol{X}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \mid \boldsymbol{X} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\}$ 此时，由于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上的乘法运算有结合律，因此可以推知 $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}$ 上的乘法也有结合律。

3 通过算例引出商的定义

这里，我们仅以群为例来说明如何在课堂教学过程中通过等价类的观点引出商群的概念。

首先，教师可以引导学生观察在例 1（1）式和例 2（1）式中，n ℤ =（n ℤ，+）是 ℤ =（ℤ，+）的子群，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ =（$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，·）是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ =（$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，·）的子群。并由此引出如何通过给定群 G=（G，·）的子群 H=（H，·）来定义 G 上的等价关系。具体对比如下：

• 在 ℤ 中，x~y 定义为 $x - y \in n\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$；

• 在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 中，X~Y 定义为 $\boldsymbol{XY}^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \le \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$；

• 在一般的群 G 中，x~y 定义为 $xy^{-1} \in H \le G$（由子群定义的等价关系的定义 [1] 第 1 章第 1.3 节）。

其中，群 ℤ 中的元素 -y 表示 y 在通常四则运算加法意义下的逆元；群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 中的元素 Y^1 表示 Y 在矩阵乘法意义下的逆元。由此可以引出群 G 上的（按其子群 H 所诱导的）等价关系。该等价关系给出了群 G 的一个划分：

$$G = \bigcup_{g \in G} gH = \dot{\bigcup_{g \in I}} gH,$$

其中，$I \subseteq G$ 是某个 G 的子集，使得 $\forall g, g' \in I, g \ne g'$，有 $gH \ne g'H$。每个等价类 gH 称为 G 的一个陪集（coset）。课堂教学过程中，教师也应当强调将上式与例 1（2）式和例 2（2）式对比。

其次，通过群 G 上的乘法，我们可以在 $gH = Hg$ 成立的前提下，定义 $gH \cdot g'H := gg'H$。由此，就可以引入正规子群，即群 G 的子群 H 如果满足 gH=Hg，则称其为 G 的一个正规子群（Normal subgroup）[1] 第 1 章第 1.5 节。正规子群的条件本质上是为了保证陪集的乘法是良好定义的。

最后，我们可以引入商群的定义，具体如下。

定义 1：群 G 相对于它的正规子群 H 的商群 G/H 是 G 的全体形如 gH 的陪集构成的集合，即：

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}。$$

其中，乘法由群 G 上的乘法按下述方式定义：

$$G/H \times G/H \to G/H,$$

$$(gH, g'H) \mapsto gg'H = \{gg'h \mid h \in H\}。$$

类似地，在《抽象代数》中进行环论以及模论的教学时，教师可以强调环 R=（R,+,）的理想 I 可以诱导环的等价类，左（或右）R- 模 M 的子模 N 也可以诱导 M 上的等价类。相应地，可以得到商环 R/I 和商模 M/N 的概念。

4 一些商群的实例

接下来，我们利用例 1 和例 2 给两个重要的商群的实例，它们分别是 Abel 群和非 Abel 群。

例 3：整数加法群 ℤ 的子群 n ℤ 是 ℤ 的正规子群，由此可以得到商群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{t + n\mathbb{Z} \mid 0 \le t \le n-1\}$（$= \mathbb{Z}/n$）。其中，商群上的加法运算为：

$$+ : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

$$(r + n\mathbb{Z}) + (s + n\mathbb{Z}) := (r + s) + n\mathbb{Z}。$$

ℤ /n ℤ 中的元素 t+n ℤ 是除以 n 余数为 t 的全体整数

构成的集合。上述加法本质上是通过 $\mathbb{Z}$ 上的加法定义了两个集合的加法。因此，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n := \{0,1,..,n-1\}$ 是 n 阶循环群，其中 $\mathbb{Z}_n$ 的加法为关于模 n 的同余类加法，即 $\forall r, s \in \mathbb{Z}_n$，有 r+s 是 $\mathbb{Z}_n$ 中唯一满足 $r+s \equiv x(\bmod n)$ 的元素 x。

例 4：一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的子群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 是正规子群，这是因为，对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 以及任意 $\boldsymbol{X} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，矩阵 SXA^{-1} 行列式为 1，由此得 $\boldsymbol{A}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\boldsymbol{A}^{-1} \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，即得 $\boldsymbol{A}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\boldsymbol{A}$；同理由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ 的行列式为 1 可得 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，于是 $\boldsymbol{A}\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})\boldsymbol{A}$。这说明 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 是一个正规子群。由于本科生刚接触近世代数时，遇到的非交换群的例子并不多。而在本科《近世代数》教学阶段中，由于本科生通常具备《高等代数》或者《线性代数》的基本知识，因此，上述正规子群是最合适大二本科生理解的算例。从分类的观点看，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的正规子群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 所诱导的等价类本质上是按矩阵的行列式来对可逆矩阵进行了分类。由此不难看出 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 是非零实数构成的在通常四则运算乘法意义下的非零实数群。

接下来我们再提供一些别的数学领域会用到的群。

例 5：设 G 是 Abel 群，则它的任何子群 H 都是 G 的正规子群，从而总是有商群 G/H。例如，实数集在通常的四则运算加法意义下成群 R=（R，+1），有理数集 Q=（Q，+）自然地作为它的一个子群。于是有商群 R/Q，它是无限群，称为 Vitali 群。R/Q 中的两个元素 x 和 y 相等当且仅当它们的差是有理数。注意到 R/Q 的每个元素都是一个等价类，因此我们可以为每个等价类固定一个代表元，全体这些代表元构成的集合与 R/Q 一一对应，且是 R 的一个子集，这个集合称为 Vitali 集（参见 [4]Page 120）。在《抽象代数》教学中，可以对 Vitali 群（或者 Vitali 集）稍加提及，并指出它是分析中的一个重要集合，具有 Lebesgue 不可测性。

例 6：集合 $\mathbb{N}_{\le n}^{+} = \{1,2,...,n\}$ 上全体双射构成的群 S_n，其中乘法定义为映射的复合“o”。该群称为 n 阶对称群，它每个元素可以等价地看成 1，2，⋯，n 上的一个置换。在《高等代数》的行列式一节内容中，我们知道置换可以分为奇置换和偶置换。S_n 中全体偶置换构成的集合 A_n 是 S_n 的一个正规子群，称为 n 阶交错群。进一步地，有 $S_n/A_n = (S_n/A_n, \circ) \cong \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2, +)$，其中偶置换与 $\mathbb{Z}_2$ 中的元素 0 对应，奇置换与 $\mathbb{Z}_2$ 中的元素 1 对应。S_n 与 A_n 是《抽象代数》中最重要的群之一，也是经典 Galois 理论中最重要的群，交错群 A_n 则被用于证明一般五次以上多项式方程不具备初等根式解。

5 结语

《抽象代数》是一门非常强调数学语言和逻辑语言的数学分支，与分析不同之处在于，代数中的概念也极具抽象性。一般而言，群是《抽象代数》中遇到的第一个概念，也是最简单的代数结构。由于高中数学、《数学分析》的前期课程以及《高等代数》都比较强调“数形结合”，同时群及其子群与商群的概念与性质又极具抽象性，这导致对刚接触《抽象代数》这门课的本科生而言在学习群、环、域等概念时都面临了一定挑战。集合上的等价关系是本科生接触的二元关系中相对熟悉的一种，它在《数学分析》中表现为导数的不定积分是其全体原函数构成的等价关系，在《高等代数》中表现为矩阵的等秩、方阵的相似、以及惯性指数的相同等。虽然这些等价关系在论文中没有被提及，但是教师在教学过程中，如果能有效地使用这些等价关系，那么作者相信，对课堂教学和引导学生学习理解商群、商环、以及商模等抽象概念会有着巨大的帮助。同时，适当插入一些后续课程可能遇到的等价关系（如《实变函数》或者《实分析》中的几乎处处相等），也能让学生为后续课程的学习做出一些初步的铺垫。

参考文献

[1] 冯克勤,李尚志,章璞.近世代数引论[M].第4版.北京:中国科学技术大学出版社,2018.

[2] 聂灵沼,丁石孙.代数学引论[M].第2版.北京:高等教育出版社,2016.

[3] Jacobsom N. Basic algebra I (Second Edition)[M]. W. H. Freeman & Company,1985.

[4] Herrlich H. Axiom of Choice [M].Springer,2006.