 DOI: https://doi.org/10.12345/xdjyjz.v2i16.22565

Application Research of the Method of Contradiction in Solving Middle School Mathematics Problems

Jing Jin Kebin Chen

School of Mathematics and Information Engineering, Longdong University, Qingyang, Gansu, 745000, China

Abstract

The application of the method of proof by contradiction in solving middle school mathematics problems is analyzed, and an improved method based on the method of proof by contradiction is proposed to further enhance students' ability to analyze and solve practical problems using the method of proof by contradiction Counterexamples are the appropriate application of reverse thinking and an important method of problem-solving and argumentation. In mathematics teaching, cleverly using the method of counterexamples can enrich teaching content, overcome the rigidity of thinking, and enhance students' interest in learning. Through active thinking, students can analyze and summarize the relevant content related to counterexamples, gradually cultivate the profoundness, breadth, and creativity of their thinking, and deepen their understanding of mathematical concepts, theorems, formulas, and rules.

Keywords

proof by contradiction; middle school mathematics; method of thinking; application; solve problem

反证法在中学数学解题中的应用研究

金晶　陈克斌

陇东学院数学与信息工程学院，中国 · 甘肃 庆阳 745000

摘　要

反证法在中学数学解题中的应用，并对反证法思想方法进行了分析，给出了一个基于反证法的改进方法，进一步提高学生利用反证法分析解决实际问题的能力。反例是逆向思维的恰当运用，也是一种重要的解题论证方法。在数学教学中，巧妙地运用反证法，既可丰富教学内容，克服思维的呆板性。又可提高学生的学习兴趣，通过学生积极的思考，将与反例联系的有关内容进行分析总结，逐步培养学生思维的深刻性，广泛性和创造性，从而加深学生对数学概念、定理、公式、法则的理解。

关键词

反证法；中学数学；思想方法；应用；解题

1 引言

反证法是指符合某个数学命题的题设条件，但不符合该命题结论的例子。即要否定一个命题只需要一个反例就行了。让同学们自己寻找反例将有利于活跃思维，有助于培养学生的创新思维。反证法因其简单、直观、说服力强的突出特点，决定了它在数学解题中起着不可替代的作用。反证法能够把一个很难说清、容易混淆的问题变得简单明了、浅显易懂，具有极强的说服力。因此它在数学解题中非常容易被学生理解接受，引起学生的共鸣，并且学生能把这种数学思想、数学方法潜移默化地运用到其他学科和生活领域中，对培养学生运用数学的意识有着不可忽略的作用。数学的发展史中，一个正确的数学命题需要严密的证明，谬误则靠反例即可否定。因此，在数学的解题中，反证法也有着极为重要的意义，它在发现和认识数学真理，强化数学基础知识的理解和掌握，培养学生的思维能力和创造能力，以及提高学生解题速度等方面的意义和作用是不可低估的。因此，在中学数学教学中有意识地、适时地使用反证法，十分必要。中学数学教学中反例的应用，我们不可忽视。那么，我们将对中学数学教学中反例的应用帮助教师对反例教学方法的运用，帮助教师提高教学质量，在数学解题中，恰当地引入典型的反例，能给学生深刻的印象，这对理解数学概念，掌握数学方法，快速解题起着很大的作用，举反例有利于培养学生的发散思维能力，克服思维的片面性，做到深入探索、有所发现，养成严谨，踏实、一丝不苟的学风。在数学教学活动中，反证法有着重要的教学价值，应给予充分的重视。美国数学家盖尔鲍姆与奥斯特德在《分析中的反例》一书中指出，"数学由两大类——证明和反例组成，而数学发展也朝着两个主要目标——提出证明和构造反例进行"。可见反例在数学理

【作者简介】金晶（1987-），女，中国甘肃榆中人，硕士，讲师，从事数学课程与数学理论研究。

论中占着重要的地位。在数学发展史中，反例和证明具有同等重要的地位。通过严密的证明才能肯定一个命题的正确性。而一个巧妙地反例即可否定一个命题的正确性。比如：$f(n)=n^2+n+72491$，当 $n=1,2,3,\cdots,11000$。$f(n)$ 都是质数。这似乎给人们造成一种认识，得到如下命题：对任意的自然数 n，$f(n)$ 都是质数。其实，这个命题是错误的。很容易找到反例：当 $n=72490$ 或 72491 时，$f(n)$ 是合数。在数学发展史上有两个著名的反例巧妙地推翻了流行很长时间的谬误。第一个著名的反例是 1640 年，法国数学家费马观察发现了如下的事实：

当 $n=0$ 时，$2^{2^0}+1=3$ 是个素数；

当 $n=1$ 时，$2^{2^1}+1=5$ 是个素数；

当 $n=2$ 时，$2^{2^2}+1=17$ 是个素数；

当 $n=3$ 时，$2^{2^3}+1=257$ 是个素数；

当 $n=4$ 时，$2^{2^4}+1=65537$ 是个素数。

由上述 5 个事实费马得出了一个猜想：当 $n=5$ 时，$2^{2^5}+1=2494967297=641\times 6700417$ 不是素数，由此，否定了费马的猜想。第二个著名的反例：19 世纪中叶，数学界长期认为连续函数除极个别点外总是处处连续的。但 1860 年，数学家威尔斯特拉却极为精巧地构成了一个反例：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$，其中 b 为奇整数 :0 ＜ a ＜ 1，且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$。此函数 $f(x)$ 居然在实轴上处处连续，但处处不可微。这个反例推翻了流行了很长时间的谬误。可见反证法在数学解题中有多么重要的作用。

2 反证法在中学数学解题中的应用举例

2.1 用反证法求解含参数问题。

例 1：若方程 $x^2+(a-2)x+5-a=0$ 的两个根都比 2 大，求实数 a 的取值范围。

[解] 根据题意得 $\begin{cases}x_1>2,\\ x_2>2,\\ \Delta\ge 0,\end{cases}$ ……………………………①

则 $\begin{cases}x_1+x_2=-(a-2)>4,\\ x_1x_2=5-a>4,\\ (a-2)^2-4(5-a)\ge 0,\end{cases}$ ……………………………②

即 $\begin{cases}a<-2,\\ a<1,\\ a\ge 4\text{或}a\le -4,\end{cases}$ 故 a≤–4。

不用反例很难发现解题结果的错误。若举反例：取 $a=-5$ 代入，则得方程 $x^2-7x+10=0$，它的一根为 2（并不比 2 大）。由这个反例可见解题过程有错误，那么错在何处呢？仔细查看可知：由① →②并不是同解变形，应在②中加条件 $2^2+(a-2)\times 2+5-a>0$，正确答案应为：$-5<a\le -4$。

例 2：已知关于 x 的方程 $kx^2-(3k-1)x+2k-2=0$。

（Ⅰ）判断命题："无论 k 为何值。方程总有两个实数根"的真假。如果是真命题。请给出证明；如果是假命题请举一次反例。

（Ⅱ）若 $k\neq 0$。设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2（其中 $x_1<x_2$）。当 k 的取值范围满足什么条件时，有 $x_1(1-x_2)+x_2<\frac{\sqrt{k^2}}{2}$ 成立?

[分析]（Ⅰ）由于 k 的取值范围不确定。可知 $kx^2-(3k-1)x+2k-2=0$ 可能为一元二次方程，也可能为一元一次方程。当其为一元一次方程时，只有一个实数根。（Ⅱ）由于 $k\neq 0,$ 可知方程为一元二次方程。先求出两根之和与两根之积的表达式。再代入 $x_1(1-x_2)+x_2<\frac{\sqrt{k^2}}{2}$ 解答。

解：（Ⅰ）"无论 x 取何值。方程总有两个实数根"是假命题，举反例：当 $k=0$ 时，原式可化为 $x-2=0$。解得 $x=2$，只有一个实数根。

（Ⅱ）$\because k\neq 0,\therefore x_1+x_2=\frac{3k-1}{k},x_1\cdot x_2=\frac{2k-2}{k}$

又 $\because x_1(1-x_2)+x_2<\frac{\sqrt{k^2}}{2}$

$\therefore x_1+x_2-x_1\cdot x_2=\frac{3k-1}{k}-\frac{2k-2}{k}=\frac{3k-1-2k+2}{k}=\frac{k+1}{k}$，

$\frac{k+1}{k}<\frac{\sqrt{k^2}}{2}$。

当 $k>0$ 时。$k^2-2k-2>0$。解得 $k<1-\sqrt{3}$（舍去）或 $k>1+\sqrt{3}$；

当 $k<0$ 时。$k^2-2k-2>0$。k 取任意实数。

综上所述 $k>1+\sqrt{3}$ 或 $k<0$。

小结：在解方程或者证明方程成立过程中，反证法是纠正错误的有效方法，更是否定谬论的锐利武器。在这个过程中，学生要寻找一些蛛丝马迹来判断该命题是否成立，不仅能培养学生善于观察和发散性思维的能力，也能让学生在用反例作对比的过程中找到茅塞顿开的乐趣。

2.2 用反证法求解数列问题。

例 3：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 S_n 为前 n 项和，$T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积。

解：设数列 $\{a_n\}$ 的公比 q，所以 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$，$T_n=\frac{\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}q}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{a_1a_n(1-q)}$，则 $\frac{S_n}{T_n}=a_1a_n$，又 $a_1a_n=a_2a_{n-1}=\cdots=a_na_1$，$a_1a_2a_3\cdots a_n=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$，即所求之积为 $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}$。

上述的解法比较常规，解题过程好像也天衣无缝，但

经过仔细推敲，我们不难举出反例加以否定。不妨设 $a_n=-1$，则 $S_n=a_1+a_2+...+a_n=-n$，$T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=-n$，则 $\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}=1$，显然 $a_1a_2a_3...a_n\neq\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}$

再举一个反例：$a_1=1,a_2=-2,a_3=4$，则：

$$S_3=a_1+a_2+a_3=3;\quad T_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

则 $\left(\frac{S_3}{T_3}\right)^{\frac{3}{2}}=8$，而 $a_1a_2a_3=-8$ 即 $a_1a_2a_3\neq\left(\frac{S_3}{T_3}\right)^{\frac{3}{2}}$

通过以上两个反例可以看出，$\left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}$ 是错误的结论。

例 4：设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，试证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列。

[分析] 数学命题的条件改变时，结论不一定正确。为了说明这一点所举出的反例称为条件变化型反例。条件变化有多种，有减少条件，有增加条件，有变化条件，考查这几种情况下结论的变化，对数学科学的研究与教学有很大的帮助。

证明 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的公比分别为 p、q，$c_n=a_n+b_n$，为证 $\{c_n\}$ 不是等比数列，只需证 $c_2^2\neq c_1\cdot c_3$。

事实上，$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$

$c_1c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=a_1^2p^2+b_1^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)$。

由于 $p\neq q$，$p^2+q^2>2pq$，又 a_1、b_1 不为零，

因此，$c_2^2\neq c_1\cdot c_3$，故 $\{c_n\}$ 不是等比数列。

例 5：设数列 { a_n }，{ b_n } 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明 { c_n } 不是等比数列。

[证明] 假设 { c_n } 是等比数列，设 $a_n=a_1\cdot p^{n-1}$，$b_n=b_1\cdot q^{n-1},p\neq q$

$c_n=a_1\cdot p^{n-1}+b_1\cdot q^{n-1}$

$\because\{c_n\}$ 是等比数列。

$\therefore\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{c_n}{c_{n-1}}$，$c_{n+1}=a_1\cdot p^n+b_1\cdot q^n$。

$c_{n-1}=a_1\cdot p^{n-2}+b_1\cdot q^{n-2}$，代入上式并化简可得 $(p-q)^2=0$，即 $p=q$。

与题设矛盾，假设错误。∴数列 { c_n } 不是等比数列

举反例：设 { a_n }，{ b_n } 的公比分别为 p,q 且 $p\neq q$，$c_n=a_n+b_n$。为证 { c_n } 不是等比数列，只需证 $c_2{}^2\neq c_1c_3$。

$$\because c_2{}^2=a_1{}^2p^2+b_1{}^2q^2+2a_1b_1pq$$

$$c_1c_3=a_1{}^2p^2+b_1{}^2q^2+a_1b_1(p^2+q^2)$$

又因为 $p\neq q$，所以 $p^2+q^2>2pq$。$c_2{}^2\neq c_1c_3$ 故 { c_n } 不是等比数列。

即，要否定 { c_n } 等比数列，只要寻找到一个反例即可，比较简单的是 c_1,c_2,c_3 不成等比数列，因此有证法二，它从另一个侧面揭示了等比数列的本质，弥补了正面教学的不足。

2.3 用反证法求解函数类问题。

例 6：若函数 $f(x)$ 对任意 $x\in R$ 均有 $f(x-1)+f(x+1)\geq 2f(x)$，则称函数具有性质 P。

(Ⅰ) 判断下面两个函数是否具有性质 P，并说明理由。

① $y=a^x(a>1)$；　② $y=x^3$

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 具有性质 P，且 $f(0)=f(n)=0$ $(n>2,n\in N^*)$。

求证：对任意 $i\in\{1，2，3，\cdots，n-1\}$ 有 $f(i)\leq 0$

(Ⅲ) 在 (Ⅱ) 的条件下，是否对任意 $x\in[0,n]$ 均有 $f(x)\leq 0$。若成立给出证明；若不成立，给出反例。

解：(Ⅰ) 证明：①函数 $y=a^x(a>1)$ 具有性质 P。

$$f(x-1)+f(x+1)-2f(x)=a^{x-1}+a^{x+1}-2a^x=a^x\left(\frac{1}{a}+a-2\right),$$

因为 $a>1$，所以 $a^x\left(\frac{1}{a}+a-2\right)>0$，即 $f(x-1)+f(x+1)\geq 2f(x)$，此函数具有性质 P。

②函数 $y=x^3$ 不具有性质 P。

例如：当 $x=-1$ 时，$f(x-1)+f(x+1)=f(-2)+f(0)=-8$，$2f(x)=-2$

所以，$f(-2)+f(0)<2f(-1)$，此函数不具有性质 P。

(Ⅱ) 假设 $f(i)$ 为 $f(1)$，$f(i)$，$\cdots$，$f(n-1)$ 中第一个大于 0 的值，则 $f(i)-f(i-1)>0$，因为函数 $f(x)$ 具有性质 P，所以对于任意 $n\in N^*$ 均有 $f(n+1)-f(n)\geq f(n)-f(n-1)$。

所以，$f(n)-f(n-1)\geq f(n-1)-f(n-2)\geq\cdots\geq f(i)-f(i-1)>0$。

所以，$f(n)=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(i+1)-f(i)]+f(i)>0$，与 $f(n)=0$ 矛盾。

故对任意 $i\in\{1，2，3，\cdots，n-1\}$ 有 $f(i)\leq 0$。

(Ⅲ) 不成立。我们可以举反例：

$$f(x)=\begin{cases}x(x-1) & x\in Q\\ x^2 & x\notin Q\end{cases}。$$

证明 ⅰ) 当 x 为有理数时，$x-1$；$x+1$ 均为有理数，此时：

$$f(x-1)+f(x+1)-2f(x)=(x-1)^2+(x+1)^2-2x^2-n(x-1+x+1-2x)=2$$

ⅱ) 当 x 为无理数时，$x-1$；$x+1$ 均为无理数，此时：

$$f(x-1)+f(x+1)-2f(x)=(x-1)^2+(x+1)^2-2x^2-n(x-1+x+1-2x)=2$$

所以，函数 $f(x)$ 对任意 $x \in R$，均有 $f(x-1)+f(x+1) \geq 2f(x)$

即函数 $f(x)$ 具有性质 P。

而当 $x \in [0,n]\ (n>2)$ 且 x 为无理数时，$f(x)>0$，所以，在 (Ⅱ) 的条件下，"对任意 $x \in [0,n]$ 均有 $f(x) \leq 0$" 不成立。

例 7：对于函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+ax$，易证：$a \geq 0$ 时，在 $[0,+\infty)$ 上为增函数；当 $a \leq -1$ 时，在 $[0,+\infty)$ 上为减函数。当 $-1<a<0$ 时，试问 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数?

[分析] 取 x_1, x_2，使 $0 \leq x_1 < x_2$，

$$\because f(x_1)-f(x_2)$$
$$=\left(\sqrt{x_1^2+1}+ax_1\right)-\left(\sqrt{x_2^2+1}+ax_2\right)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+a\right)$$

$$\because \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} \in (0,1),\quad -1<a<0$$

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+a$ 的符号摇摆不定，凭直觉可猜想此时函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不单调。

函数不单调我们可以举以下两个反例：

(a) 在该区间内找 $x_1<x_2<x_3$，在对应的三个函数值中，$f(x_2)$ 却不是中间值，即 $[f(x_2)-f(x_1)][f(x_2)-f(x_3)] \geq 0$. 这种方法在本题中不太适用。

(b) 找一个常数 c，使方程 $f(x)=c$ 该区间内有不等的根。

为使 $\sqrt{x^2+1}+ax=c$ 求解方便起见，移项平方后所得的一元二次方程最好缺少一次项或缺少常数项，故 c 取 0 或 1 最好。

当 $c=0$ 时，$(a^2-1)x^2=1$，$\because a^2-1<0$，$\therefore$ 方程无解。

B. $c=1$ 时，化简得 $(1-a^2)x^2+2ax=0$ 解得 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2a}{a^2-1}>0$，举反例成功。

这说明 $x_1=0, x_2=\dfrac{2a}{a^2-1}$ 时，$f(x_1)=f(x_2)=1$, 故 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数。

3 结语

在中学数学解题中，重视和恰当地运用反证法，能够调动学生学习的积极性，养成重视条件、严密推理的习惯，提高学生的数学能力和学习能力，教学中教师应该多鼓励学生多提问题，不要对学生提出的问题或猜想给予讽刺和挖苦，要引导学生在某些定理的条件、结论、某些定义的适用范围内要敢于猜想，对不是现成的定理要善于发现和创新，自己提出问题，进行猜想，得出结果，恰当地运用反证法，可以使同学们的创新能力得以提高，有利于开展研究性学习，从而有效地提高教学质量。反证法能优化解题过程，解题是一种数学能力。对于中学生来说，解题是他们必须掌握的数学能力。通过解题，可以考察他们对知识的掌握情况。所以教师在教学中应加大力度培养学生的发散思维，让学生学会运用反证法分析解决实际问题。

参考文献

[1] 教育部.全日制义务教育数学课程标准[M].北京:北京师范大学出版社,2001.

[2] 石文成.反例在高考压轴题中的应用[J].湖南省株洲市第二中学,2009(6).

[3] 高浪.反例的使用和寻求[J].江苏淮安市钦工中学,1998(2).

[4] 李丰东.浅析初中数学教学中的反例教学[J].数学学习方法与研究,2013(6):47.

[5] 冯素芳.试论数学反例及其构造[J].北京工业技术学院学报,2003(7):57-58.

[6] 朱彩英.寻求反例的思考方法[J].教材研究,2002(2):64.

[7] 丁利娟.反例在中学数学教学中的作用例谈[J].试题与研究(新课程论坛),2010(3):33.

[8] 王浩.数学教学中的反例构造法[J].教学月刊(中学版),2011(11):57-58.