

Optimization Study on the Solution of Value Range of Quantity Product Problem Based on Polarization Identity

Fan LI

Northwestern Polytechnical University Affiliated Middle School, Xi'an, Shaanxi, 710000, China

Abstract

The process of providing reference answers for many problems related to the range of values of the product of plane vectors is very complex and computationally intensive, which makes it difficult for students to quickly and accurately find the answers. In recent years, some scholars have proposed using polarization identity to simplify the calculation process of quantity product range problems [4]. Inspired by this, the author continues to explore the application scenarios of using polarization identity to simplify complexity and quickly solve quantity product value range problems. This article summarizes six example problems, optimizes conventional solutions, and identifies two common characteristics of quantity product range problems that can be solved quickly using polarization identity equations. At the end of this article, three practice questions are provided, which readers can try to solve using the polarization identity.

Keywords

polarization identity; Vector quantity product; Solution optimization

基于极化恒等式的数量积取值范围问题解法优化研究

李帆

西北工业大学附属中学, 中国 · 陕西 西安 710000

摘 要

很多平面向量数量积取值范围问题, 参考答案给出的过程非常复杂, 运算量大, 导致学生不能快速准确地求出答案. 近些年有学者提出利用极化恒等式简化数量积范围问题计算过程的一些案例^[4], 受此启发, 笔者继续探索用极化恒等式化繁为简, 快速求解数量积取值范围问题的应用场景. 本文整理了六道例题, 优化常规解法, 总结出可以用极化恒等式巧解速算的数量积范围问题的两个共同特征. 本文结尾给出了3道练习题, 读者可以用极化恒等式尝试解决.

关键词

极化恒等式; 向量数量积; 解法优化

1 引言

平面向量的数量积范围问题是向量章节的难点题型, 常见的应对思路有定义法, 基底法, 建系坐标化^[2]等. 只有选择合适的方法才能快而准地算出结果, 否则庞大的运算量将成为最大阻碍.

2 极化恒等式的内容与几何意义.

设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是两个平面向量, 称下面的恒等式为“极化恒等式”.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$$

极化恒等式的几何意义是 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 等于以这组向量为邻边的三角形的中线长度与底边一半长度的平方差^[1], 在下图 1 的 $\triangle ABC$ 中 D 为 BC 中点, 那么 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AD}|^2 - |\vec{BD}|^2$, 极

化恒等式将向量数量积问题“去向量化”, 仅分析中线 AD 或 BC 的取值范围^[4]即知结果.

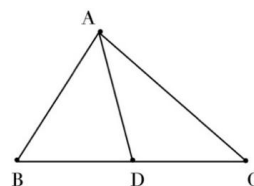


图 1

3 极化恒等式巧解案例.

例 1. 如下图 2, 已知矩形 ABCD, $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, 点 P 为矩形 ABCD 内一点, 且 $|\vec{AP}|=1$

设 $\angle BAP = \alpha$. 求 $(\vec{PC} + \vec{PD}) \cdot \vec{AP}$ 的最大值为 _____.
常规解法:

由于 $AP=1$, 可以设, 那么 $\vec{PC} = (2 - \cos \alpha, \sqrt{3} - \sin \alpha)$,
 $\vec{PD} = (-\cos \alpha, \sqrt{3} - \sin \alpha)$, $\vec{AP} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 从而 $\vec{PC} + \vec{PD} =$

【作者简介】李帆 (1997-), 男, 中国陕西西安人, 硕士, 从事高中数学研究.

$$(2 - 2\cos\alpha, 2\sqrt{3} - 2\sin\alpha),$$

$$\text{所以 } (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \cdot \overrightarrow{AP} = 2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = 4\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) - 2.$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, $(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \cdot \overrightarrow{AP}$ 取得最大值 2.

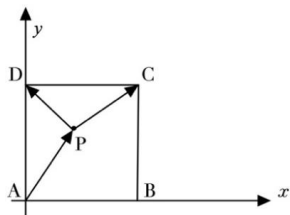


图 2

解法分析:

常规解法采用建系后坐标化的方法, 先用圆的参数方程设出 P 的坐标, 从而得到本题涉及到的几个向量的坐标, 之后采用三角恒等变换公式进行化简, 最后得出最值, 此方法运算量较大.

$\because \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PE}$, AE 为定值, 取 AE 的中点 O, 根据极化恒等式 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PA} = |PO|^2 - |AO|^2$, 只需分析 |PO| 的最值即可得到答案.

解法改进:

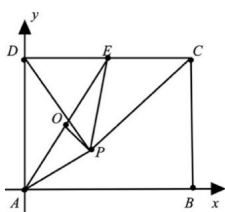


图 3

在上图 3 中, 设 E 为 CD 中点, O 为 AE 中点, 那么 $|AO| = \frac{1}{2}|AE| = 1$, 根据极化恒等式:

$$(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \cdot \overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PA} = -2(|PO|^2 - |AO|^2) = 2|AO|^2 - 2|PO|^2 \leq 2|AO|^2 = 2$$

等号成立当且仅当 P 与 O 重合, 此时 $|PO| = 0$.

例 2. 如图 4, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 顶点 B, C 分别在 x 轴的非负半轴, y 轴的非负半轴上滑动, M 为 AB 中点, 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的最大值.

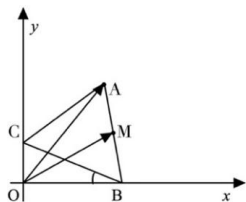


图 4

常规解法:

$$\text{设 } \angle OBC = \theta, \text{ 则 } B(2\cos\theta, 0), C(0, 2\sin\theta), A(2\cos\theta - 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3}), 2\sin(\theta + \frac{\pi}{3})), M(2\cos\theta - \cos(\theta + \frac{\pi}{3}), \sin(\theta + \frac{\pi}{3}))$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} &= [2\cos\theta - 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})] \times [2\cos\theta - \cos(\theta + \frac{\pi}{3})] \\ &\quad + 2\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \times \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ &= 4\cos^2\theta + 2\cos^2(\theta + \frac{\pi}{3}) - 6\cos\theta\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + 2\sin^2(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2 + 4\cos^2\theta - 6\cos\theta\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + 2\sin^2(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2 + \cos^2\theta + 3\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta \\ &= \frac{5}{2} + \sqrt{7}\sin(2\theta + \varphi) \text{ (其中 } \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{9}). \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} \text{ 的最大值为 } \frac{5}{2} + \sqrt{7}.$$

解法分析:

如果按原题给出的建系方式 A, B, C 均是动点, 求出的 A, B, C 三点的坐标非常复杂, 标准答案的方法和前两个题本质相同, 运算量甚至更大, 计算过程相当耗时.

如果逆向分析, 令 BC 固定不动, 由于 $OB \perp OC$, 因此 O 在以 BC 为直径的半圆上运动, $\triangle OAM$ 中 AM 为定值, 设 AM 的中点为 N, 由极化恒等式 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = |ON|^2 - |AN|^2$, 分析 |ON| 的最值即知.

解法改进:

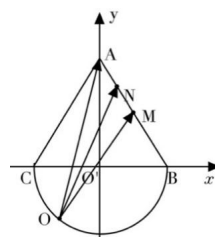


图 5

令 BC 固定不动, 由于 $OB \perp OC$, 根据相对运动, O 在以 BC 为直径的半圆上运动, 以 CB 方向为 x 轴, BC 中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系, 见上图 5. 设 N 为 AM 中点, 那么 $N(\frac{1}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$, $|AN| = \frac{1}{2}$, 易求 $|ON| \leq |OO'| + |O'N| = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$. 根据极化恒等式 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = |ON|^2 - |AN|^2 \leq (1 + \frac{\sqrt{7}}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{5}{2} + \sqrt{7}$.

例 3. 下图 6 中, 设 P 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的边上的任意一点, 长度为 4 的线段 MN 是该正六边形外接圆的一条动弦, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围为 _____.

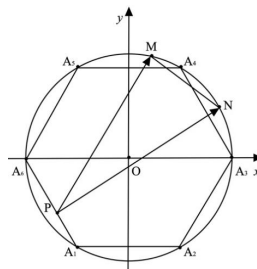


图 6

分析: $\triangle PMN$ 中 $MN=4$ 为定值, 设 MN 的中点为 C , 由极化恒等式 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = |\overrightarrow{PC}|^2 - |\overrightarrow{CM}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 - 4$, 由于 MN 是半径为 $R = 2\sqrt{2}$ 的圆上的一条长为 4 的弦, $\therefore C$ 在以 O 为圆心, $r=2$ 的圆上. 只需分析 $|\overrightarrow{PC}|$ 的范围即可.

解:

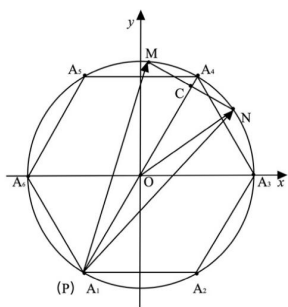


图 7

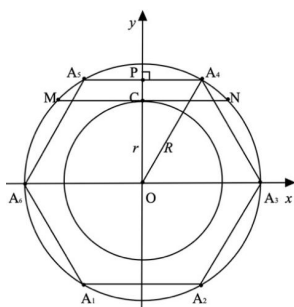


图 8

设 C 为 MN 的中点, 该正六边形的外接圆半径 $R = 2\sqrt{2}$, 那么 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = |\overrightarrow{PC}|^2 - |\overrightarrow{CM}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 - 4$

又 $\because \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$, $|\overrightarrow{PO}| \leq R = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{R^2 - 2^2} = 2$, $\therefore \overrightarrow{PO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 同向时, $|\overrightarrow{PC}|$ 最大, 此时 P 在 A_1 处且 C 在线段 OA_4 上, 见上图 7, $|\overrightarrow{PC}|_{\max} = 2\sqrt{2} + 2$.

又 $OC=2$, $\therefore C$ 在以 O 为圆心, $r=2$ 的圆上. 取 $MN \parallel A_4A_5$, 当 P 在 A_4A_5 中点处时, $|\overrightarrow{PC}|$ 最小, 见上图 8, $|\overrightarrow{PC}|_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R - r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} - 2 = \sqrt{6} - 2$.

$$\therefore (\sqrt{6} - 2)^2 \leq |\overrightarrow{PC}|^2 \leq (2\sqrt{2} + 2)^2$$

$$\therefore \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = |\overrightarrow{PC}|^2 - 4 \in [6 - 4\sqrt{6}, 8 + 8\sqrt{2}].$$

例 5. 设圆 O 的半径为 1, P, A, B 是圆 O 上不重合的点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值是 _____.

分析: 与圆相关的问题可以从垂径定理入手, 下图 11 中, 设 AB 中点为 C , 连接 CO 并延长交圆 O 于 D , 那么 D 为劣弧 AB 的中点, 由极化恒等式 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 \geq |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2$, 用垂径定理找到 $|\overrightarrow{CD}|$ 与 $|\overrightarrow{BC}|$ 之间的关系, 转化为单变量表达式求最值问题, 利用函数工具即求.

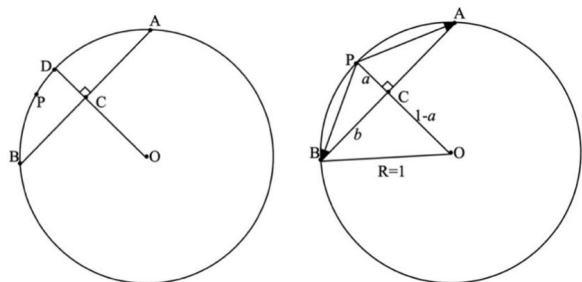


图 9

解:

设 C 为 AB 中点, D 为劣弧 AB 中点, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PC}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2$ 要使 $|\overrightarrow{PC}|$ 最小, 则 P 须落在 D 处.

设 $|\overrightarrow{PC}|=a$, $|\overrightarrow{BC}|=b$, 由垂径定理有: $|\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2$

即 $(1-a)^2 + b^2 = 1^2 \therefore b^2 = 2a - a^2$. 再根据极化恒等式 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = a^2 - b^2 = a^2 - (2a - a^2) = 2(a^2 - a)$, 其中 $a \in (0, 1)$,

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{\min} = -\frac{1}{2}$.

4 极化恒等式的应用场景

通过上述案例可以发现, 能用极化恒等式巧解的数量积问题符合以下特征, 第一是如果 $\triangle ABC$ 的底边为定值, 那么根据极化恒等式 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$, 其中 D 为 BC 的中点, 只需确定中线 AD 的范围即知结果, 如例 1、例 2、例 3 第二是如果中线 AD 和底边 BC 的长度存在等量关系, 那么可以用极化恒等式得到一个单变量问题, 从而用函数工具求出结果, 如例 4.

最后本文设置了 3 个练习题, 读者可以用本文介绍的技巧求解.

练习题.

1. 在 $\triangle ABC$ 中 $AB=3$, $BC=4$, $AC=5$, PQ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆的一条直径, M 为 $\triangle ABC$ 边上的动点 (含三角形顶点), 则 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ 的取值范围为 _____. 答案: $[0, 9]$

2. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形, 其中心为 O , P 为平面内的一点, 若 $OP=1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 _____. 答案: -11

3. 下图 10 中, 已知 P 是半径为 2, 圆心角 $\frac{\pi}{3}$ 为的一段圆弧 AB 上一点, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$ 的最小值为 _____.

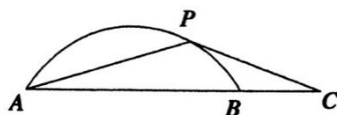


图 10

答案: $5 - 2\sqrt{13}$

5 总结

近年来, 有学者提出用极化恒等式求解数量积的取值范围, 把向量问题几何化^[1]的新思路, 也有学者深入探索了极化恒等式与基本不等式的共性^[3]. 这些前人的工作为本文提供了理论基础, 笔者整理了教学中遇到的极化恒等式解题案例, 总结经验技巧, 盘点极化恒等式的应用场景。

参考文献

- [1] 袁青. 巧用极化恒等式解决两类平面向量数量积问题[J]. 数学通讯(上半月), 2016(7,8).
- [2] 石向阳. 巧用极化恒等式 秒求数量积范围[J]. 数学通讯(上半月), 2017(10).
- [3] 董泉发. 极化恒等式与基本不等式的共性[J]. 数学通讯(下半月), 2019(6).
- [4] 吴文尧. 运用极化恒等式简化向量运算[J]. 数学通讯(上半月), 2019(7).